3e CYCLE
D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
No D'ORDRE : 2106

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR 3eme CYCLE
SPÉCIALITÉ : Analyse Numérique

par

Anne-Marie ESTEVE-LEFEVERE

Sujet de la thèse : Étude d'un problème aux limites non linéaire lié à l'équation de Laplace d'une membrane élastique de révolution

Soutenue le 3 Juin 1976 devant la Commission d'examen :

Roger TEMAM..... Président

Jean GENET..... } Examinateurs
Luc TARTAR..... }

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548104_0013

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR 3ème CYCLE

SPECIALITE : Analyse Numérique

par

Anne-Marie LEFEVERE

Sujet de la thèse : *Etude d'un problème aux limites non linéaire lié à l'équation de Laplace d'une membrane élastique de révolution.*

Soutenue le 3 JUIN 1976 devant la Commission d'examen :

Roger TEMAM . . . . . Président

Jean GENET . . . . . } Examinateurs
Luc TARTAR . . . . . }

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIERES

pages

INTRODUCTION

CHAPITRE 0 *ETUDE DU CAS* $g(x) \equiv -\frac{1}{\theta_o}$ 0-1

CHAPITRE I *RECHERCHE DE SOLUTIONS POSITIVES DANS LE CAS* $g \geqslant 0$ 1-1

§ 1-1 Formulation variationnelle 1-2

§ 1-2 Théorème d'existence pour le problème $P_\varepsilon(\theta_o, L, g)$. . 1-3

§ 1-3 Théorème d'existence pour le problème $P(\theta_o, L, g)$ . . 1-10

CHAPITRE II *CONSTRUCTION DE SOLUTIONS PAR DES METHODES ITERATIVES* 2-1

§ 2-1 Rappels et définitions 2-1

§ 2-2 Cas où g est de signe constant. Théorème d'existence 2-3

§ 2-3 Autre méthode de suite monotone 2-9

§ 2-4 Cas où g n'est pas de signe constant. Théorème d'existence 2-14

§ 2-5 Un résultat d'unicité dans le cas où $F(u) = \frac{1}{u}$ 2-17

§ 2-6 Une remarque sur l'utilisation d'un résultat de J.P.Puel 2-19

CHAPITRE III *RECHERCHE DE SOUS SOLUTIONS ET SUR SOLUTIONS PARTICULIERES* 3-1

§ 3-1 Conditions faisant intervenir $|g|_{L^1(\Omega)}$ 3-1

§ 3-2 Cas où $g \in L^\infty(\Omega)$ et $F(u) = \frac{1}{u}$ 3-3

CHAPITRE IV *PROBLEME PERIODIQUE* 4-1

§ 4-1 Non existence de solutions 4-1

§ 4-2 Un théorème d'existence 4-3

CONCLUSIONS

BIBLIOGRAPHIE

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur TEMAM qui m'a proposé ce travail, et dont l'aide et les encouragements m'ont été précieux. Je le remercie tout particulièrement d'avoir accepté de présider le jury.

Monsieur GENET, de la Faculté des Sciences de PAU, s'est intéressé de très près à mon travail. Je lui en suis reconnaissante.

Je remercie également Monsieur TARTAR d'avoir bien voulu participer à ce jury.

Mes remerciements, vont enfin à Mlle ABEL pour les soins et la compétence qu'elle a su apporter à la réalisation matérielle de ce texte.

INTRODUCTION

L'objet initial de ce travail est l'étude des conditions d'existence, d'unicité des solutions $\theta(x)$ de l'équation

$$-\frac{\theta''}{(1+\theta'^2)^{3/2}} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_o} = g \qquad 0 \leqslant x \leqslant L$$

satisfaisant aux conditions aux limites de Dirichlet

$$\theta(0) = \theta(L) = \theta_o > 0$$

Cette équation est liée à l'équation de Laplace d'une membrane élastique de révolution. Une équation voisine intervient également dans certains problèmes de cristallographie, cf. J.M. Quenisset (communication personnelle).

L'équation satisfaite par θ est d'un type doublement non-linéaire. La première non-linéarité est fonction des dérivées de θ, la seconde de θ. Des non-linéarités en θ, du type fonction rationnelle, se rencontrent dans certains problèmes de nature biologique. Citons en particulier les équations étudiées par J.P. Kernevez, ainsi que le problème d'équilibre de la membrane circulaire (cf. Callegari, Reiss, Keller).

En posant $u = \theta - \theta_o$, on se ramène évidemment à un problème aux limites homogènes $P(\theta_o, L, g)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{u+\theta_o} - \dfrac{1}{\theta_o} = g \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

On commence par remarquer que, dans le cas très simple $g(x) \equiv -\frac{1}{\theta_o}$ on peut expliciter et ainsi déterminer le nombre de solutions du problème, nombre qui dépend de θ_o et L (chapitre 0).

Ceci donne une indication intéressante sur la nature des résultats que l'on peut espérer obtenir dans le cas général.

Cependant, dans ce cas général, comme le problème $P(\theta_o,L,g)$ mis sous forme variationnelle n'est pas coercif dans un espace $W_o^{1,p}(\Omega)$ avec $p > 1$ ($\Omega =]0,L[$) [1] , on est amené à régulariser le problème par l'introduction d'un terme $-\varepsilon u''$ (ou même non linéaire : $-\varepsilon \frac{d}{dx}(|u'|^{p-2}u')$, suivant l'espace dans lequel g est donnée).

On cherche alors les solutions de $P(\theta_o,L,g)$, en étudiant le comportement des sclutions du problème régularisé $P_\varepsilon(\theta_o,L,g)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

En fait, dans les chapitres I et II, on envisage une situation un peu plus générale que celle du problème $P(\theta_o,L,g)$ en étudiant une non linéarité du type $F(u+\theta_o)-F(\theta_o)$ (au lieu de $\frac{1}{u+\theta_o} - \frac{1}{\theta_o}$) , la fonction $x \to F(x)$ étant définie continue sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $[0,+\infty[$ et décroissante.

Les chapitres I et II sont traités avec cette non-linéarité et les résultats s'appliquent immédiatement au problème initial. Les problèmes correspondants seront toujours notés $P(\theta_o,L,g)$ et $P_\varepsilon(\theta_o,L,g)$.

Le chapitre I est consacré à la recherche de solutions positives, à partir des sclutions positives du problème $P_\varepsilon(\theta_o,L,g)$ dont l'étude est faite par une méthode de Galerkin.

Au chapitre II, on s'intéresse aux solutions u , telles que $u > -\theta_o$. Sous certaines hypothèses on peut conclure à l'existence de telles solutions. En particulier en supposant qu'il existe des "sous solutions" et "sur solutions" pour le problème $P(\theta_o,L,g)$ (dans un sens que l'on précisera).

On peut alors construire des solutions approchées du problème, par des méthodes itératives.
De telles méthodes ont été utilisées par divers auteurs en particulier Keller, Sattinger, pour étudier des problèmes du type

$$\begin{cases} A(u) + f(u,\text{grad } u) = 0 & \text{dans } \Omega \text{ ouvert de } R^n \\ u/\partial\Omega = 0 \end{cases}$$

dans des cas où A est un opérateur différentiel linéaire à partie principale elliptique du second ordre et lorsque f ne dépend que de u .

---

(1) Le problème variationnel est coercif dans $W_o^{1,1}(\Omega)$ qui est un espace non réflexif.

Ces problèmes ont été abordés différemment par Puel qui fait intervenir l'inéquation variationnelle associée.
On remarque que le problème $P_\varepsilon(\theta_o, L, g)$ peut aussi être abordé sous l'angle des méthodes de J.P. Puel.

On donne dans le chapitre III des conditions suffisantes sur L, θ_o et g, pour que les hypothèses des chapitres I et II, qui assurent l'existence de solutions de $P(\theta_o, L, g)$, soient réalisées.
On revient plus précisément au cas où $F(u) = \frac{1}{u}$.

Au chapitre IV enfin on recherche les solutions périodiques de l'équation

$$-\frac{\theta''}{(1+\theta'^2)^{3/2}} + \frac{1}{\theta} = f$$

c'est-à-dire vérifiant

$$\theta(0) = \theta(L)$$

$$\theta'(0) = \theta'(L)$$

On démontre un théorème d'existence dans le cas où f est de signe constant. On utilise pour cela, les théorèmes d'existence précédents pour les problèmes $P(\theta_o, L, g)$ et une méthode de point fixe.

CHAPITRE 0

ETUDE DU CAS : $g(x) \equiv -\frac{1}{\theta_o}$

On étudie le problème (P) suivant :
Trouver $\theta \in C^2[0,L]$ solution de

$$(0\text{-}1) \qquad -\frac{\theta''}{(1+\theta'^2)^{3/2}} + \frac{1}{\theta} = 0$$

$$(0\text{-}2) \qquad \theta(0) = \theta(L) = \theta_o > 0$$

Définissons s et ϕ par

$$s = \int_{x_o}^{x} \sqrt{1+\theta'^2(t)}\,dt \ , \quad \phi = \mathrm{Arctg}[\theta'(x)] \qquad \phi \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[$$

Alors on a :

$$(0\text{-}3) \qquad dx = ds \cos\phi$$

$$(0\text{-}4) \qquad d\theta = ds \sin\phi$$

Et (0-1) donne

$$(0\text{-}5) \qquad -\frac{d\phi}{ds} + \frac{1}{\theta} = 0$$

Utilisant (0-3) , (0-4) , (0-5) on obtient la représentation paramétrique suivante :

$$(0\text{-}6) \qquad \begin{cases} \theta(\phi) = k\, e^{-\cos\phi} \\ x(\phi) = k \int_0^{\phi} e^{-\cos u} \cos u\, du + c \end{cases}$$

(où k et c sont des constantes d'intégration).

Remarquons que

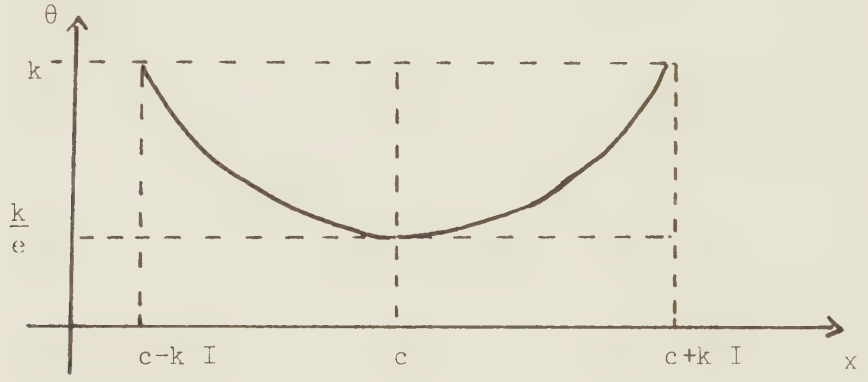
$$\theta(\phi) = \theta(-\phi) \quad \text{et}$$

$$x(\phi) + x(-\phi) = 2c \tag{0-7}$$

D'autre part

$$\theta'(\phi) \geq 0 \quad \text{et} \quad x'(\phi) \geq 0 \text{ , pour } \quad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\ .$$

D'où le graphe de θ :



On a posé $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\cos u} \cos u \, du$ (1)

Pour que θ soit solution du problème (P) , il faut pouvoir déterminer k et c de façon que les points $(0,\theta_o)$ et (L,θ_o) appartiennent au graphe de θ .

Ceci est possible si et seulement si :

$$\exists\, \phi_o \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ tel que}$$

$$\theta_o = k\, e^{-\cos \phi_o} \tag{0-8}$$

$$x(\phi) = L \quad \text{et} \quad x(-\phi) = 0 \tag{0-9}$$

On montre que les conditions (0-8) et (0-9) sont équivalentes à

$$c = \frac{L}{2} \tag{0-10}$$

$$\theta_o\, e^{\cos \phi_o} \int_0^{\phi_o} e^{-\cos u} \cos u \, du = \frac{L}{2} \tag{0-11}$$

---

(1) Par la méthode des trapèzes on obtient $I \simeq 0{,}298$.

En effet (0-7) et (0-9) impliquent (0-10)
On a alors, en utilisant (0-6) et (0-9)

$$(0\text{-}12) \qquad L = k \int_0^{\phi_o} e^{-\cos u} \cos u \, du + \frac{L}{2}$$

Et on en déduit (0-11) , grace à (0-8) .

Réciproquement, s'il existe $\phi_o \in [0, \frac{\pi}{2}[$ solution de (0-11) , en choisissant $k = \theta_o e^{\cos \phi_o}$ et $c = \frac{L}{2}$, il est clair que (0-8) et (0-9) sont vérifiées.

Conséquence :

Le nombre de solutions de (0-11) est égal au nombre de solutions du problème (0-1) , (0-2) . Les solutions de (0-11) sont déterminées par les intersections de la droite $y = \frac{L}{2}$ avec la courbe d'équation :

$$y(\phi) = \theta_o \, e^{\cos \phi} \int_0^{\phi} e^{-\cos u} \cos u \, du$$

$$y'(\phi) = \theta_o (\cos \phi - \sin \phi \, e^{\cos \phi} \int_0^{\phi} e^{-\cos u} \cos u \, du)$$

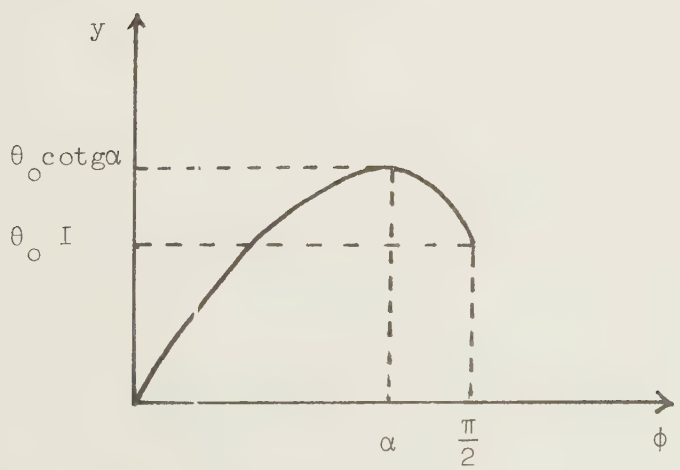
On calcule $y''(\phi)$ et on vérifie que $y''(\phi) < 0 \quad \forall \phi \in [0, \frac{\pi}{2}[$

y' décroît alors de θ_o à $-\theta_o I$.

D'où $\exists \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $y'(\alpha) = 0$, et on a

$$y(\alpha) = \theta_o \operatorname{cotg} \alpha$$

Voici le graphe associé à $y(\phi)$



Conclusions

. Lorsque $L \in]0, 2\theta_o\ I]$, le problème (P) a une solution unique.
(Pour $L = 2\theta_o\ I$, il y a une solution de (0-1) , (0-2) qui n'est pas de classe C^2 et qui correspond à $\phi_o = \frac{\pi}{2}$) .

. Lorsque $L \in]2\theta_o\ I\ ,\ 2\theta_o \operatorname{cotg} \alpha\ [$, le problème (P) admet deux solutions distinctes.

. Lorsque $L = 2\theta_o \operatorname{cotg} \alpha$, le problème (P) a une solution.

. Lorsque $L > 2\theta_o \operatorname{cotg} \alpha$, le problème (P) n'a pas de solution.

CHAPITRE I

RECHERCHE DE SOLUTIONS u POSITIVES DANS LE CAS g ≥ 0

On étudie le problème suivant :

Trouver une fonction θ telle que l'on ait

$$\begin{cases} -\dfrac{\theta''}{(1+\theta'^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{\theta_o} = g \quad \text{dans} \quad]0,L[\\ \\ \text{avec} \quad \theta(0) = \theta(L) = \theta_o > 0 \quad . \end{cases}$$

En posant $u = \theta - \theta_o$ on se ramène à un problème aux limites homogènes :

$$P(\theta_o,L,g) \begin{cases} (1.1) \quad -\dfrac{d}{dx}\dfrac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} + \dfrac{1}{u+\theta_o} = g(x) + \dfrac{1}{\theta_o} \quad \text{dans} \quad]0,L[\\ \\ u(0) = u(L) = 0 \quad . \end{cases}$$

On place ce problème dans un cadre plus général en remplaçant la non-linéarité $\dfrac{1}{u+\theta_o} - \dfrac{1}{\theta_o}$ du problème $P(\theta_o,L,g)$ par $F(u+\theta_o) - F(\theta_o)$.

F est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

F est définie continue sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$

F est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Désignons encore par $P(\theta_o,L,g)$ ce nouveau problème. Toute solution positive est solution du problème formel $\mathcal{P}(\theta_o,L,g)$.

$$\mathcal{P}(\theta_o,L,g) \begin{cases} (1\text{-}2) - \dfrac{d}{dx}\dfrac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} + F(|u| + \theta_o) = g + F(\theta_o) \quad \text{dans} \quad]0,L[\\ \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

On étudie $\mathcal{P}(\theta_o,L,g)$ comme limite du problème régularisé $\mathcal{P}_\varepsilon(\theta_o,L,g)$

$$\mathcal{P}_\varepsilon(\theta_o,L,g)\ \varepsilon>0 \begin{cases} (1\text{-}3) \quad -\varepsilon u''_\varepsilon - \dfrac{d}{dx}\dfrac{u'_\varepsilon}{\sqrt{1+u'^2_\varepsilon}} + F(|u_\varepsilon|+\theta_o) = g+F(\theta_o) \text{ dans }]0,L[\\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(L) = 0 \end{cases}$$

1-1 FORMULATION VARIATIONNELLE

On désigne par Ω l'ouvert $]0,L[$. Il est naturel d'introduire alors l'espace $V = H^1_o(\Omega)$ pour les conditions aux limites données et H l'espace de Hilbert réel $L^2(\Omega)$. On notera (f_1,f_2) le produit scalaire dans H ou dans la dualité entre V et V' .

Identifiant H à son dual on a :

$$V \subset H \subset V'$$

On suppose que $g \in L^2(\Omega)$ (1)

Si u_ε est une solution classique de $\mathcal{P}_\varepsilon(\theta_o,L,g)$, alors u_ε est solution de $\mathcal{P}'_\varepsilon$:

Trouver $u_\varepsilon \in V$ telle que :

$$(1\text{-}4) \quad \begin{cases} \varepsilon \displaystyle\int_\Omega u'_\varepsilon v' \,dx + \int_\Omega \frac{u'_\varepsilon}{\sqrt{1+u'^2_\varepsilon}} v'dx + \int_\Omega F(|u_\varepsilon|+\theta_o)vdx = \int_\Omega [g+F(\theta_o)]vdx \\ \forall\, v \in V \end{cases}$$

Réciproquement

Soit u_ε une solution de $\mathcal{P}'_\varepsilon$, si dans (1-4) on prend $v = \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

on trouve : $-\varepsilon u''_\varepsilon - \dfrac{d}{dx}\dfrac{u'_\varepsilon}{\sqrt{1+u'^2_\varepsilon}} + F(|u_\varepsilon|+\theta_o) = g + F(\theta_o)$ égalité au

sens distributions. Comme $g \in L^2(\Omega)$, il s'agit d'une égalité dans $L^2(\Omega)$, on a bien l'égalité (1-3). Et u_ε étant dans $H^1_o(\Omega)$ $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(L) = 0$.

Remarque 1-1

Lorsque u_ε est une solution de (1-3) dans $H^1(\Omega)$, de (1-3) on déduit que $u''_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ puisque $g \in L^2(\Omega)$.

---

(1) si $g \in L^q(\Omega)$, avec $1 < q < 2$, on régularise par $-\varepsilon \dfrac{d}{dx}(|u'_\varepsilon|^{q'-2}u'_\varepsilon)$ (avec $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'} = 1$) alors $V = W^{1,q'}_o(\Omega)$ $H = L^2(\Omega)$.

Pour $v \in H^1(\Omega)$, la formule d'intégration par parties permettant de passer de (1-3) à (1-4) est alors justifiée et les deux problèmes $\mathcal{P}_\varepsilon(\theta_o, L, g)$ et $\mathcal{P}'_\varepsilon(\theta_o, L, g)$ sont donc équivalents.

1-2 THEOREME D'EXISTENCE POUR LE PROBLEME $\mathcal{P}_\varepsilon(\theta_o, L, g)$

Théorème 1-1

Soit $g \in L^2(\Omega)$ et $g \geq 0$.

Alors le problème $\mathcal{P}_\varepsilon(\theta_o, L, g)$ admet une solution u_ε telle que :

$$u_\varepsilon \in H_o^1(\Omega) \quad , \quad u''_\varepsilon \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad .$$

Remarque 1-2

Ce résultat est valable avec en particulier $F(u) = \frac{1}{u}$.

Remarque 1-3

$\Omega \subset \mathbb{R}$ et $u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$ donc $u_\varepsilon \in C^1(\bar{\Omega})$.

Pour démontrer ce théorème on s'inspire des méthodes de J.L. LIONS [1] , en utilisant des propriétés de monotonie et de compacité, mais le résultat ne découle pas directement des théorèmes classiques sur les opérateurs monotones.

Etudions d'abord les propriétés de l'opérateur A_ε où $A_\varepsilon : v \to -\frac{d}{dx}\left(\varepsilon v' + \frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}}\right)$

i/ A_ε est un opérateur de $H_o^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ qui transforme les bornés de $H_o^1(\Omega)$ en bornés de $H^{-1}(\Omega)$.

(Plus précisément on a $||A_\varepsilon(v)||_{H^{-1}(\Omega)} \leq \varepsilon \, ||v||_{H_o^1(\Omega)} + 1)$.

ii/ A_ε est hémicontinu :

$\forall u, v, \omega \in H_o^1(\Omega)$ la fonction $\lambda \to (A(u+\lambda v), \omega)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

iii/ A_ε est monotone de $H_o^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

iv/ A est coercif :

$$\frac{(A_\varepsilon(u), u)}{||u||_{H_o^1(\Omega)}} \to +\infty \quad \text{si} \quad ||u||_{H_o^1(\Omega)} \to \infty \quad .$$

Démonstration : i, ii, et iv sont immédiates.

Pour iii, on écrit :

$$(A_\varepsilon(u) - A_\varepsilon(v), u-v) = \varepsilon \int_\Omega (u'-v')^2 dx + \int_\Omega \left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}} \right) (u'-v')dx .$$

La fonction $\psi : X \to \frac{X}{\sqrt{1+X^2}}$ définie sur $\mathbb{R}$ est croissante d'où

$$\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} - \frac{v'(x)}{\sqrt{1+v'(x)^2}} \right) (u'(x) - v'(x)) \geqslant 0 \qquad \text{p.p. dans } \Omega$$

et $(A_\varepsilon(u) - A_\varepsilon(v) , u - v) \geqslant 0 \qquad \forall\, u,v \in H_o^1(\Omega)$.

Remarque 1-4

Soit $B_\varepsilon : v \to -\frac{d}{dx} \left(\varepsilon v' + \frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}} \right) + F(|v| + \theta_o)$.

L'opérateur B_ε n'est pas monotone de $H_o^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Le théorème d'existence va être établi en plusieurs étapes.

1ère étape. Solutions approchées de $\mathcal{P}_\varepsilon$

On identifie $H_o^1(\Omega)$ à un sous-espace vectoriel fermé de $(L^2(\Omega))^2$ qui est séparable. Il existe donc une suite $\{\omega_i\}$ avec $\omega_i \in H_o^1(\Omega)$ telle que :

$\forall\, m$, $\omega_1, \ldots, \omega_m$ soient linéairement indépendants .

Les combinaisons linéaires finies des ω_i sont denses dans $H_o^1(\Omega)$.

Soit V_m engendré par $\omega_1 , \omega_2, \ldots, \omega_m$.

On cherche $u_{\varepsilon,m} \in V_m$, $u_{\varepsilon,m} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{i,m} \omega_i$ solution du problème approché :

$$\mathcal{P}_{\varepsilon,m} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \int_\Omega u'_{\varepsilon,m} \omega'_i dx + \int_\Omega \frac{u'_{\varepsilon,m}}{\sqrt{1+u'^2_{\varepsilon,m}}} \omega'_i dx + \int_\Omega F(|u_{\varepsilon,m}|+\theta_o)\omega_i dx = \int_\Omega (g+F(\theta_o))\omega_i dx \\ 1 \leqslant i \leqslant m \end{array} \right.$$

On démontre l'existence d'une solution de $\mathcal{P}_{\varepsilon,m}$ à l'aide du lemme suivant : [cf. : LIONS J.L. [1]] .

Lemme 1-1

Soit X un espace de Hilbert de dimension finie. On notera par $(.,.)$ le produit scalaire et par $|.|$ la norme dans X.
Soit P une application continue de X dans lui-même, telle que pour un $k > 0$ convenable on ait :

$(P(\xi),\xi) \geqslant 0 \qquad \forall \xi$ tel que $|\xi| = k$.

Alors il existe ξ_o , $|\xi_o| \leqslant k$ tel que $P(\xi_o) = 0$.

On applique ce lemme en prenant $X = \mathbb{R}^m$
avec, si $\xi = \{\xi_i\}$, $\eta = \{\eta_i\}$, ξ et $\eta \in \mathbb{R}^m$

$$(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \eta_i \qquad , \qquad |\xi| = \Big[\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \Big]^{1/2} .$$

Soit $\xi = \{\xi_{i,m}\}$. On lui associe $u_{\varepsilon,m} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{i,m}\, \omega_i$.

Puis on pose :

$$\eta_{i,m} = \varepsilon \int_\Omega u'_{\varepsilon,m}\omega'_i dx + \int_\Omega \frac{u'_{\varepsilon,m}}{\sqrt{1+u'^2_{\varepsilon,m}}}\, \omega'_i dx + \int_\Omega F(|u_{\varepsilon,m}|+\theta_o)\omega_i dx - \int_\Omega |g+F(\theta_o))\omega_i dx$$

et $P(\xi) = \{\eta_{i,m}\}$.

Alors

$$(P(\xi),\xi) = \varepsilon \int_\Omega u'^2_{\varepsilon,m} dx + \int_\Omega \frac{u'^2_{\varepsilon,m}}{\sqrt{1+u'^2_{\varepsilon,m}}}\, dx + \int_\Omega F(|u_{\varepsilon,m}|+\theta_o)u_{\varepsilon,m} dx - \int_\Omega (g+F(\theta_o))u_{\varepsilon,m} dx$$

mais

$$\Big| \int_\Omega (g+F'(\theta_o))u_{\varepsilon,m} dx \Big| \leqslant |g+F(\theta_o)|_{L^2(\Omega)} |u_{\varepsilon,m}|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_1 \, |g+F(\theta_o)|_{L^2(\Omega)} |u'_{\varepsilon,m}|_{L^2(\Omega)}$$

et comme F est décroissante sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $[0,+\infty[$, on a

$$\Big| \int_\Omega F(|u_{\varepsilon,m}|+\theta_o)u_{\varepsilon,m} dx \Big| \leqslant F(\theta_o) \int_\Omega |u_{\varepsilon,m}| dx \leqslant C_2 \, |u'_{\varepsilon,m}|_{L^2(\Omega)} \qquad (1) .$$

Et donc

$$(1\text{-}5) \qquad (P(\xi),\xi) \geqslant \varepsilon \, |u'_{\varepsilon,m}|^2_{L^2(\Omega)} - C_3 |u'_{\varepsilon,m}|_{L^2(\Omega)}$$

d'où $\qquad (P(\xi),\xi) \geqslant 0 \quad$ si $\quad |u'_{\varepsilon,m}|_{L^2(\Omega)} \geqslant \dfrac{C_3}{\varepsilon}$

---

(1) Les C_i désignent des constantes qui ne dépendent que des données (donc indépendantes de m et de ε) .

ε étant fixé, cette condition est réalisée si $|\xi| = k$ avec k assez grand.

D'autre part, l'application $\xi \to P(\xi)$ est bien continue de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$: On peut écrire η_i sous la forme $\int_\Omega f(\xi,x)dx$ où f est une fonction continue de ξ , la continuité de P résulte de l'application du théorème de Lebesgue.

P vérifiant les hypothèses du lemme 1-1, il existe donc ξ_o tel que $P(\xi_o) = 0$. Ceci entraîne l'existence de $u_{\varepsilon,m} \in V_m$ solution de $\mathcal{P}_{\varepsilon,m}$.

Si $u_{\varepsilon,m}$ est solution, $P(\xi_o) = 0$ et (1-5) entraînent

$$(1\text{-}6) \qquad |u'_{\varepsilon,m}|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_3}{\varepsilon}$$

$$\text{et} \qquad |u_{\varepsilon,m}|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_4}{\varepsilon}$$

<u>2ème étape</u> : <u>Passage à la limite (sur m)</u>

On déduit de (1-6) que $u_{\varepsilon,m}$ est, pour ε fixé, dans un borné de $H_o^1(\Omega)$.

D'autre part, on a

$$(1\text{-}7) \qquad \sup_{x\in\Omega} \left| \frac{u'_{\varepsilon,m}(x)}{\sqrt{1+u'^2_{\varepsilon,m}(x)}} \right| \leq 1 \quad .$$

Grace à (1-6) , (1-7) on peut extraire de la suite $u_{\varepsilon,m}$ une sous suite $u_{\varepsilon,\mu}$ telle que :

$$(1\text{-}8) \qquad u_{\varepsilon,\mu} \to u_\varepsilon \quad \text{dans} \quad H_o^1(\Omega) \quad \text{faible}$$

$$(1\text{-}9) \qquad \frac{u'_{\varepsilon,\mu}}{\sqrt{1+u'^2_{\varepsilon,\mu}}} \to \chi \quad \text{pour} \quad \sigma(L^\infty(\Omega),L^1(\Omega)) \quad .$$

On a $u_\varepsilon \in H_o^1(\Omega)$ et $\chi \in L^\infty(\Omega)$.

L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, on peut extraire de $u_{\varepsilon,\mu}$ une autre sous-suite (notée encore $u_{\varepsilon,\mu}$) telle que

$$(1\text{-}10) \qquad u_{\varepsilon,\mu} \to u_\varepsilon \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad \text{fort et p.p. dans} \quad \Omega \quad .$$

On peut passer à la limite dans le problème $\mathcal{P}_{\varepsilon,m}$ que l'on récrit pour $m =$

Soit i fixé et $\mu \geq i$, on a :

$$(1\text{-}11) \quad \varepsilon \int_\Omega u'_{\varepsilon,\mu} \omega'_i dx + \int_\Omega \frac{u'_{\varepsilon,\mu}}{\sqrt{1+u'^2_{\varepsilon,\mu}}} \omega'_i dx + \int_\Omega F(|u_{\varepsilon,\mu}|+\theta_o)\omega_i dx = \int_\Omega (g+F(\theta_o))\omega_i dx \ .$$

On utilise (1-8) et (1-9) pour passer à la limite sur les deux premières intégrales.

Démontrons

$$(1\text{-}12) \quad \int_\Omega F(|u_{\varepsilon,\mu}|+\theta_o)\omega_i dx \to \int_\Omega F(|u_\varepsilon|+\theta_o)\omega_i dx \ .$$

F étant continue sur $]0,+\infty[$, et utilisant (1-10) on a

$$(1\text{-}13) \quad F(|u_{\varepsilon,\mu}(x)|+\theta_o)\omega_i \to F(|u_\varepsilon(x)|+\theta_o)\omega_i$$

F étant décroissante sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $[0,+\infty[$, on obtient

$$(1\text{-}14) \quad |F(|u_{\varepsilon,\mu}|+\theta_o)\omega_i| \leq F(\theta_o)\ |\omega_i|$$

(1-13) , (1-14) et le théorème de Lebesgue entraînent (1-12) .

On déduit maintenant de (1-11) :

$$(1\text{-}15) \quad \varepsilon \int_\Omega u'_\varepsilon \omega'_i dx + \int_\Omega \chi \omega'_i dx = \int_\Omega (g+F(\theta_o)-F(|u_\varepsilon|+\theta_o))\omega_i \ dx$$

et cela pour i fixé, quelconque.

Les combinaisons linéaires finies des ω_i sont denses dans $H^1_o(\Omega)$ donc (1-15) est réalisé $\forall\, v \in H^1_o(\Omega)$.

En particulier pour $v = \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, d'où :

$$(1\text{-}16) \quad -\varepsilon u''_\varepsilon - \frac{d}{dx}\chi + F(|u_\varepsilon|+\theta_o) = g+F(\theta_o) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \ .$$

Il reste à démontrer que $-\frac{d\chi}{dx} = -\frac{d}{dx}\frac{u'_\varepsilon}{\sqrt{1+u'^2_\varepsilon}}$

On se sert pour cela (cf. J.L. LIONS [1]) de la monotonie et de l'hémi-continuité de l'opérateur A_ε .

D'après (1-11) :

$$(A_\varepsilon(u_{\varepsilon,\mu}) \ , \ u_{\varepsilon,\mu}) = \int_\Omega (g+F(\theta_o)-F(|u_{\varepsilon,\mu}|+\theta_o))u_{\varepsilon,\mu} dx \ .$$

Mais

$$|(g+F(\theta_o)-F(|u_{\varepsilon,\mu}|+\theta_o))u_{\varepsilon,\mu}| \leq C_5|u_{\varepsilon,\mu}|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_6|u'_{\varepsilon,\mu}|_{L^2(\Omega)}$$

et grace à (1-6)

$$|(g+F(\theta_o)-F(|u_{\varepsilon,\mu}|+\theta_o))u_{\varepsilon,\mu}| \leq \frac{C_7}{\varepsilon} \quad .$$

Donc d'après le théorème de Lebesgue

$$(A_\varepsilon(u_{\varepsilon,\mu}),u_{\varepsilon,\mu}) \to \int_\Omega g+F(\theta_o)-F(|u_\varepsilon|+\theta_o)u_\varepsilon \, dx \ .$$

En utilisant (1-16) on a :

$$(1\text{-}17) \qquad (A_\varepsilon(u_{\varepsilon,\mu}),u_{\varepsilon,\mu}) \to (-\varepsilon u''_\varepsilon - \frac{d\chi}{dx} \ , \ u_\varepsilon) \ .$$

A_ε étant monotone :

$$(A_\varepsilon(u_{\varepsilon,\mu}) - A_\varepsilon(v) \ , \ u_{\varepsilon,\mu} - v) \geq 0 \quad \forall v \in H_o^1(\Omega) \ .$$

On peut passer à la limite sur μ dans cette expression en utilisant (1-17) , (1-8) , (1-9) d'où

$$(- \varepsilon u''_\varepsilon - \frac{d\chi}{dx} - A_\varepsilon(v) \ , \ u_\varepsilon - v) \geq 0 \quad \forall v \in H_o^1(\Omega) \ .$$

On prend ensuite $v = u_\varepsilon - \lambda\omega \qquad \lambda > 0 \ , \quad \omega \in H_o^1(\Omega)$

$$(- \varepsilon u''_\varepsilon - \frac{d\chi}{dx} - A_\varepsilon(u_\varepsilon-\lambda\omega),\omega) \geq 0 \ .$$

On fait tendre λ vers 0 .

D'après l'hémicontinuité de A_ε

$$(-\varepsilon u''_\varepsilon - \frac{d\chi}{dx} - A_\varepsilon(u_\varepsilon),\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in V$$

D'où $$A_\varepsilon(u_\varepsilon) = - \varepsilon u''_\varepsilon - \frac{d\chi}{dx}$$

(égalité à priori dans V' , mais en fait dans $L^2(\Omega)$ puisque le 2ème terme est dans $L^2(\Omega)$) .

Le problème $P_\varepsilon(\theta_o,L,g)$ admet donc une solution u_ε dans $H_o^1(\Omega)$ et d'après la remarque (1-1) $u''_\varepsilon \in L^2(\Omega)$.

Remarque 1-5

On aurait pu obtenir l'existence d'une solution u_ε de $\mathcal{P}_\varepsilon(\theta_o,L,g)$ en montrant que l'opérateur B_ε défini par :

$B_\varepsilon(v) = -\frac{d}{dx}\left(\varepsilon v' + \frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}}\right) + F(|v|+\theta_o)$ est un opérateur pseudo monotone.

Ceci résulte des propriétés de A_ε, de la continuité de F et de la compacité de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

3ème étape. Démontrons que $u_\varepsilon \geqslant 0$

Lemme 1-2

Soit $v \in H^1(\Omega)$ tel que $A_\varepsilon(v) \in L^2(\Omega)$ et vérifiant :

$$(1\text{-}18)\quad \begin{cases} A_\varepsilon(v) \geqslant 0 & \text{dans } \Omega \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$

Alors

$$(1\text{-}19)\quad v \geqslant 0 \text{ p.p. dans } \Omega .$$

Démonstration

Ceci résulte de l'application du principe du maximum faible.

On multiplie scalairement (1-18) par v^-, $v^- = -v$ si $v < 0$, $= 0$ autrement.

Alors $\int_\Omega A_\varepsilon(v).v^- \geqslant 0$

Comme v appartient à $H^1_o(\Omega)$, v^- est aussi dans $H^1_o(\Omega)$

et $$\frac{\partial v^-}{\partial x_i} = \begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x_i} & \text{si } v < 0 \\ 0 & \text{si } v \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{p.p.} \quad \text{(cf. STAMPACCHIA G. [1])}.$$

Intégrant par parties on obtient :

$$-\varepsilon\int_{\Omega^-} v'^2 dx - \int_{\Omega^-} \frac{v'^2}{\sqrt{1+v'^2}}\, dx \geqslant 0$$

où $\Omega^- = \Omega \cap \{x/v(x) < 0\}$.

Donc $v' = 0$ p.p. sur Ω^-, par suite v = constante (localement) et nécessairement $v = 0$ sur Ω^- d'où (1-19).

On applique le lemme 1-2 à $u_\varepsilon \in H_o^1(\Omega)$ solution de

$$A_\varepsilon(u_\varepsilon) = g + F(\theta_o) - F(|u_\varepsilon|+\theta_o)$$

or $\quad F|u_\varepsilon| + \theta_o) \leqslant F(\theta_o)$

et par hypothèse $g \geqslant 0$

donc $\quad A_\varepsilon u_\varepsilon \geqslant 0$ dans Ω d'où $u_\varepsilon \geqslant 0$ dans Ω .

1-3 THEOREME D'EXISTENCE POUR LE PROBLEME $P_\varepsilon(\theta_o,L,g)$

1-3-1

Les estimations à priori que l'on obtient pour le problème $P_\varepsilon(\theta_o,L,g)$ sont insuffisantes pour passer à la limite sur ε .

Nous allons faire des hypothèses supplémentaires qui nous permettrons d'obtenir des estimations sur u'_ε .

Lemme 1-3

Soit $g \in L^2(\Omega)$ $\quad g \geqslant 0$

On suppose qu'il existe $v \in H_o^1(\Omega)$ tel que $-\dfrac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}} \in L^2(\Omega)$, vérifiant

$$(1\text{-}20) \qquad -\frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}} \geqslant g + F(\theta_o) \quad \text{dans } \Omega$$

alors on a :

$$(1\text{-}21) \qquad 0 \leqslant u_\varepsilon \leqslant v$$

$$(1\text{-}22) \qquad |u'_\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leqslant |v'|_{L^2(\Omega)} \quad .$$

Plus généralement, on a :

Lemme 1-4

Soit $g \in L^q(\Omega)$, $q > 1$, $g \geqslant 0$.

On suppose qu'il existe une fonction v telle que

$$(H) \quad \begin{cases} v \in W_o^{1,p}(\Omega) \text{ avec } p > 1 \text{ et } q \geqslant p' \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1) \\ -\dfrac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}} \in L^{p'}(\Omega) \\ v \text{ est solution de (1-20)} \end{cases}$$

Alors on a :

(1-21) et (1-23) $\quad |u'_\varepsilon|_{L^p(\Omega)} \leqslant |v'|_{L^p(\Omega)}$.

Remarque 1-6

On introduira au chapitre II la notion de sur(sous) solution. On remarquera alors que les conditions imposées ici à v en font une sur solution particulière.

Démonstration

Il suffit de démontrer le lemme plus général (1-4)

1er cas : $1 < p < \infty$

Puisque $g \in L^q(\Omega)$, $q \geq p'$, on prend comme terme de régularisation

$$- \varepsilon \frac{d}{dx} \left(|u'_\varepsilon|^{p-2} u'_\varepsilon \right) \qquad (1)$$

On a alors

$$V = W_o^{1,p}(\Omega) \quad .$$

Soit $u_\varepsilon \in W_o^{1,p}(\Omega)$ solution de

$$(1\text{-}24) \quad - \varepsilon \frac{d}{dx} \left(|u'_\varepsilon|^{p-2} u'_\varepsilon \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{u'_\varepsilon}{\sqrt{1+u'^2_\varepsilon}} \right) = g + F(\theta_o) - F(|u_\varepsilon| + \theta_o) \text{ dans } \Omega$$

$$g + F(\theta_o) - F(|u_\varepsilon| + \theta_o) \in L^{p'}(\Omega) \quad .$$

On déduit de (1-24) que

$$h(u'_\varepsilon) = \varepsilon |u'_\varepsilon|^{p-2} u'_\varepsilon + \frac{u'_\varepsilon}{\sqrt{1+u'^2_\varepsilon}} \in W^{1,p'}(\Omega)$$

Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}$ $h(u'_\varepsilon) \in C^o(\bar{\Omega})$.

Pour ε fixé différent de 0 , on en déduit que u'_ε est borné.

Par suite $\left[\varepsilon(p-1)|u'_\varepsilon|^{p-2} + \frac{1}{(1+u'^2_\varepsilon)^{3/2}} \right]^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ et $u''_\varepsilon \in L^{p'}(\Omega)$. (2)

Ceci entraîne que

$$\frac{u''_\varepsilon}{(1+u'^2_\varepsilon)^{3/2}} \in L^{p'}(\Omega) \text{ et que } - \varepsilon \frac{d}{dx} \left[|u'_\varepsilon|^{p-2} u'_\varepsilon \right]$$

étant différence de deux fonctions de $L^{p'}(\Omega)$ est aussi dans $L^{p'}(\Omega)$.

---

(1) Lorsque $1 < p < 2$ il n'y a pas ici de complications techniques supplémentaires. cf. J.L. LIONS [1] , chap. 2.

(2) On écrit $u'_\varepsilon = h^{-1} o h(u'_\varepsilon)$ et on utilise le lemme 1-1 de Stampacchia [1].

(1-24) ainsi que les hypothèses faites sur g et F entraînent que

$$-\varepsilon \frac{d}{dx}\left(|u'_\varepsilon|^{p-2}u'_\varepsilon\right) \geqslant 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

d'où

$$(1\text{-}25) \qquad -\frac{u''_\varepsilon}{(1+u'^2_\varepsilon)^{3/2}} \leqslant g + F(\theta_o) - F(|u_\varepsilon|+\theta_o) \quad \text{p.p. dans } \Omega \ .$$

De (1-20) et (1-25) on déduit

$$(1\text{-}26) \qquad -\frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}} + \frac{u''_\varepsilon}{(1+u'^2_\varepsilon)^{3/2}} \geqslant F(|u_\varepsilon|+\theta_o) \geqslant 0 \ .$$

Le premier membre de (1-26) est dans $L^{p'}(\Omega)$.

D'autre part $(u_\varepsilon - v) \in W_o^{1,p}(\Omega)$ d'où $(v-u_\varepsilon)^- \in W_o^{1,p}(\Omega)$

$\left[(v-u_\varepsilon)^- = u_\varepsilon - v \text{ si } v < u_\varepsilon \ , \ 0 \text{ autrement}\right]$.

On multiplie (1-26) par $(v-u_\varepsilon)^-$ et on intègre sur Ω

$$\int_\Omega \frac{d}{dx}\left(-\frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}} + \frac{u'_\varepsilon}{\sqrt{1+u'^2_\varepsilon}}\right)(v-u_\varepsilon)^- dx \geqslant 0 \ .$$

Intégrant par parties on obtient :

$$(1\text{-}27) \qquad -\int_{\Omega^-}\left(\frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}} - \frac{u'_\varepsilon}{\sqrt{1+u'^2_\varepsilon}}\right)(v'-u'_\varepsilon) \leqslant 0$$

où $\Omega^- = \Omega \cap \{x/v(x) < u_\varepsilon(x)\}$

de (1-27) on déduit que sur Ω^- , $u_\varepsilon - v$ est égal à une constante (localement) et cette constante est nécessairement 0 .

Donc $u_\varepsilon \leqslant v$ p.p. sur Ω d'où (1-21) .

Démonstration de (1-23)

On a vu précédemment que $\frac{d}{dx}(|u'_\varepsilon|^{p-2}u'_\varepsilon) \in L^{p'}(\Omega)$ et $-\frac{d}{dx}(|u'_\varepsilon|^{p-2}u'_\varepsilon \geqslant 0$. p.p. dans Ω

Multiplions (1-21) par $-\frac{d}{dx}(|u'_\varepsilon|^{p-2}u'_\varepsilon)$ et intégrons sur Ω

$$-\int_\Omega \frac{d}{dx}(|u'_\varepsilon|^{p-2}u'_\varepsilon)v\,dx \geqslant -\int_\Omega \frac{d}{dx}(|u'_\varepsilon|^{p-2}u'_\varepsilon)u_\varepsilon\,dx \ .$$

Intégrant par parties il vient :

$$\int_\Omega |u'_\varepsilon|^p dx \leqslant \int_\Omega |u'_\varepsilon|^{p-2}u'_\varepsilon\, v'dx \ .$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega |u'_\varepsilon|^{p-2}u'_\varepsilon v'dx| \leqslant \Big[\int_\Omega |u'_\varepsilon|^p dx\Big]^{\frac{p-1}{p}} \Big[\int_\Omega |v'|^p dx\Big]^{\frac{1}{p}} .$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Young

$$ab \leqslant \frac{1}{p_1} a^{p_1} + \frac{1}{p'_1} b^{p'_1} \quad \text{pour} \quad a,b \geqslant 0 \quad , \; p_1 \geqslant 1, \; \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = 1 .$$

On obtient avec $p_1 = p$:

$$\int_\Omega |u'_\varepsilon|^p dx \leqslant \frac{1}{p} \int_\Omega |v'|^p dx + \frac{p-1}{p} \int_\Omega |u'_\varepsilon|^p dx \quad \text{d'où} \quad (1\text{-}22).$$

2ème cas p infini et $g \in L^q(\Omega)$ $q > 1$

Soit u_ε solution du problème $P_\varepsilon(\theta_o, L, g)$ correspondant au terme de régularisation $-\varepsilon \frac{d}{dx}(|u'_\varepsilon|^{q'-2}u'_\varepsilon)$ $\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\right)$.

On obtient (1-21) comme précédemment.

v dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ et $\dfrac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}}$ dans $L^1(\Omega)$ entraînent que $v'' \in L^1(\Omega)$.

d'où $v \in C^1(\bar{\Omega})$ et grace à (1-20) $v'' \geqslant 0$ p.p. dans Ω .

D'où $|v'|_{L^\infty(\Omega)} = \sup(|v'(0)| \; , \; |v'(L)|)$.

De même $|u'_\varepsilon|_{L^\infty(\Omega)} = \sup(|u'_\varepsilon(0)| \; , \; |u'_\varepsilon(L)|)$.

Utilisant alors (1-21) ainsi que $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(L) = 0$, $v(0) = v(L) = 0$.

On obtient $0 \leqslant u'_\varepsilon(0) \leqslant v'(0)$ et $v'(L) \leqslant u'_\varepsilon(L) \leqslant 0$.

D'où on déduit $|u'_\varepsilon|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant |v'|_{L^\infty(\Omega)}$.

1.3.2.

On peut maintenant aborder le problème $P(\theta_o, L, g)$ et énoncer le théorème d'existence.

Théorème 1-2

On suppose que

i/ g est donnée avec $g \in L^q(\Omega)$, $q > 1$, $g \geqslant 0$.

ii/ il existe $v \in W_o^{1,p}(\Omega)$ vérifiant les hypothèses (H) du lemme (1-4).

Alors il existe une fonction u telle que :

$$u \in W_o^{1,p}(\Omega)$$

$$u \geqslant 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

$$-\frac{d}{dx}\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} + F(u+\theta_o) = g+F(\theta_o)$$

Démonstration

Soit u_ε solution du problème $\mathcal{P}_\varepsilon(\theta_o,L,g)$ avec le terme de régularisation $-\varepsilon \frac{d}{dx}(|u'_\varepsilon|^{p-2}u'_\varepsilon)$ pour $1 < p < \infty$ $(-\varepsilon \frac{d}{dx}(|u'_\varepsilon|^{q'-2}u'_\varepsilon)$ pour $p = \infty)$.

D'après le lemme (1-4), u_ε est dans un borné de $W_o^{1,p}(\Omega)$, avec $p > 1$.

On peut extraire une sous-suite $u_{\varepsilon'}$ telle que :

$$u_{\varepsilon'} \to u \quad \text{dans} \quad W_o^{1,p}(\Omega) \quad \text{faible}$$

$$u_{\varepsilon'} \to u \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega) \quad \text{fort et p.p.}$$

u appartient à $W_o^{1,p}(\Omega)$.

D'autre part

$$F(|u_{\varepsilon'}|+\theta_o) \leqslant F(\theta_o)$$

$$|F(u_{\varepsilon'}+\theta_o)u_{\varepsilon'}| \leqslant F(\theta_o)v$$

Le passage à la limite dans la formulation variationnelle associée à $\mathcal{P}_\varepsilon(\theta_o,L,g)$ s'effectue alors comme en 1-2.

Le terme $\varepsilon'\int_\Omega u'_{\varepsilon'}\omega' dx$ est remplacé par $\varepsilon'\int_\Omega |u'_{\varepsilon'}|^{p-2}u'_{\varepsilon'}\omega' dx$,

(pour $1 < p < \infty$), où $u_{\varepsilon'}$ et ω appartiennent à $W_o^{1,p}(\Omega)$.

On majore $|\varepsilon'\int_\Omega |u'_{\varepsilon'}|^{p-2}u'_{\varepsilon'}\omega' dx|$ par $\varepsilon'|u'_{\varepsilon'}|^{\frac{p}{p'}}_{L^p(\Omega)} |\omega'|_{L^p(\Omega)}$ qui tend vers lorsque ε' tend vers 0, puisque $|u'_{\varepsilon'}|_{L^p(\Omega)}$ est borné.

(Pour $p = \infty$ on obtient un résultat analogue).

Conclusion

u_ε converge dans $W_o^{1,p}(\Omega)$ faible vers u solution de $\mathcal{P}(\theta_o,L,g)$.

Comme $u \geqslant 0$, u est solution du problème $P(\theta_o,L,g)$.

CHAPITRE II

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS PAR DES METHODES ITERATIVES

2-1 RAPPELS ET DEFINITIONS

Soit A l'opérateur : $v \to -\frac{d}{dx}\frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}}$

A opère de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,\infty}(\Omega)$

p' est défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

F est une fonction satisfaisant aux hypothèses du chapitre I ,
et $g \in L^q(\Omega)$ $\quad q > 1$.

Définition 2-1

Une fonction $v \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, est appelée sur solution du problème $P(\theta_o, L, g)$ si $A(v) \in L^{p'}(\Omega)$, $v + \theta_o \geqslant \alpha > 0$ et si

$$(2\text{-}1) \qquad \begin{cases} A(v) + F(v+\theta_o) \geqslant g + F(\theta_o) & \text{p.p. dans } \Omega \\ v(0) \geqslant 0 \qquad v(L) \geqslant 0 \end{cases}$$

Définition 2-2

Une fonction $w \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, est appelée sous solution du problème $P(\theta_o, L, g)$ si $A(w) \in L^{p'}(\Omega)$, $\omega + \theta_o \geqslant \alpha > 0$ et si

$$(2\text{-}2) \qquad \begin{cases} A(w) + F(w+\theta_o) \leqslant g + F(\theta_o) & \text{p.p. dans } \Omega \\ w(0) \leqslant 0 \qquad w(L) \leqslant 0 \end{cases}$$

Remarque 2-1

La condition $v+\theta_o \geqslant \alpha > 0$ entraîne que $F(v+\theta_o) \leqslant F(\alpha)$ d'où $F(v+\theta_o) \in L^{\infty}(\Omega)$ de même pour $F(w+\theta_o)$.

Remarque 2-2

$v \in W^{1,p}(\Omega)$ et $A(v) \in L^{p'}(\Omega)$ n'entraînent pas que $v'' \in L^{q_1}(\Omega)$ avec $q_1 > 1$.
En fait on a seulement $v'' \in L^{q_1}(\Omega)$ avec $q_1 = \frac{p}{p+2}$.

Lemme 2-1

Soient u et v appartenant à $W_o^{1,p}(\Omega)$
telles que $A(u) \in L^{p'}(\Omega)$ et $A(v) \in L^{p'}(\Omega)$
et $A(v) - A(u) \geqslant 0$ dans Ω
alors $v \geqslant u$.

La démonstration de ce lemme classique utilisant le principe du maximum a déjà été rappelée.

Remarque 2-3

Ce lemme est encore vrai en remplaçant A par A_ε donné par :

$$(2\text{-}3) \qquad A_\varepsilon(v) = -\varepsilon \frac{d}{dx}\left(|v'|^{p-2}v'\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}}\right) \quad , \quad \varepsilon > 0 \quad .$$

Lemme 2-2

Soient u et v appartenant à $W_o^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, telles que

$-\frac{d}{dx}\left(|u'|^{p-2}u'\right) \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{d}{dx}\left(|u'|^{p-2}u'\right) \leqslant 0$ p.p. [resp. $\frac{d}{dx}\left(|u'|^{p-2}u'\right) \geqslant 0$ p.p]

et (2-4) $\quad 0 \leqslant u \leqslant v \quad$ [resp. $v \leqslant u \leqslant 0$]

alors (2-5) $\quad |u'|_{L^p(\Omega)} \leqslant |v'|_{L^p(\Omega)}$.

La démonstration de ce lemme a été donnée au cours de celle du lemme (1-3). D'autre part, (2-5) est encore vérifié pour p infini.

En utilisant les notions de sur solutions et sous solutions on va établir maintenant des théorèmes d'existence de solutions pour le problème $P(\theta_o, L, g)$. Le premier théorème (2-1) concernant des fonctions g de signe constant, permet de retrouver en particulier les résultats obtenus au chapitre I par une méthode de Galerkin.

Pour les fonctions g , non supposées de signe constant, on démontre le théorème 2-2.

2-2

Théorème 2-1

On suppose que :

i) g donnée, $g \in L^q(\Omega)$, $q > 1$ et $g \geqslant 0$ (resp. $g \leqslant 0$).

ii) il existe une sur solution v (resp. une sous solution w) du problème $P(\theta_o, L, g)$ avec

v (resp. w) dans $W_o^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, $q \geqslant p'$

$v \geqslant 0$ (resp. $w \leqslant 0$) dans Ω .

Alors le problème $P(\theta_o, L, g)$ admet une solution minimale u_{min} et une solution maximale u_{max} appartenant à $[0,v] \cap W_o^{1,p}(\Omega)$ (resp. $[w,0] \cap W_o^{1,p}(\Omega)$) (1) .

C'est-à-dire que si z est une solution de $P(\theta_o, L, g)$ avec $0 \leqslant z \leqslant v$ (respectivement $w \leqslant z \leqslant 0$) on a :

$$u_{min} \leqslant z \leqslant u_{max}$$

On considère le problème régularisé $P_\varepsilon(\theta_o, L, g)$

$$(2\text{-}6) \qquad \begin{cases} A_\varepsilon(u_\varepsilon) + F(u_\varepsilon + \theta_o) = g + F(\theta_o) \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(L) = 0 \end{cases}$$

Avec A_ε donné par (2-3) pour $1 < p < \infty$, sinon pour $p = \infty$, on remplace dans (2-3) p par q'. Pour simplifier la rédaction on supposera $1 < p < \infty$.

La démonstration du théorème est basée sur la considération des deux suites $u_{\varepsilon,n}$ et $v_{\varepsilon,n}$ l'une monotone croissante, l'autre monotone décroissante, définies de la manière suivante :

$$(2\text{-}7) \qquad \begin{cases} A_\varepsilon(u_{\varepsilon,n}) = g + F(\theta_o) - F(u_{\varepsilon,n-1} + \theta_o) \\ u_{\varepsilon,n}(0) = u_{\varepsilon,n}(L) = 0 \\ u_{\varepsilon,0} = 0 \quad \text{(respectivement } u_{\varepsilon,0} = w \text{ pour } g \leqslant 0) \end{cases} .$$

$$(2\text{-}8) \qquad \begin{cases} A_\varepsilon(v_{\varepsilon,n}) = g + F(\theta_o) - F(v_{\varepsilon,n-1} + \theta_o) \\ v_{\varepsilon,n}(0) = v_{\varepsilon,n}(L) = 0 \\ v_{\varepsilon,0} = v \quad \text{(respectivement } v_{\varepsilon,0} = 0 \text{ pour } g \leqslant 0). \end{cases}$$

(1) $[0,v] = \{z / z \in L^p(\Omega) \ , \ 0 \leqslant z \leqslant v \ \text{ p.p. dans } \Omega\}$.

On s'intéresse essentiellement à la démonstration du cas $g \geqslant 0$.

Le cas $g \leqslant 0$ se traitant de la même manière avec les modifications évidentes de signe.

Les suites $u_{\varepsilon,n}$ et $v_{\varepsilon,n}$ possèdent alors les propriétés suivantes :

Proposition 2-1

Pour ε fixé

(2-9)
$$\left|\begin{array}{l} \text{La suite } u_{\varepsilon,n} \text{ est monotone croissante.} \\ \text{La suite } v_{\varepsilon,n} \text{ est monotone décroissante .} \\ u_{\varepsilon,n} \leqslant v_{\varepsilon,n} \qquad \forall\, n \\ \text{La suite } |u'_{\varepsilon,n}|_{L^p(\Omega)} \text{ est monotone croissante, majorée par } |v'|_{L^p(\Omega)} \\ \text{La suite } |v'_{\varepsilon,n}|_{L^p(\Omega)} \text{ est monotone décroissante.} \end{array}\right.$$

Pour n fixé

(2-10)
$$\left|\begin{array}{l} \text{si } 0 < \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1 \\ u_{\varepsilon_1,n} \leqslant u_{\varepsilon_2,n} \\ v_{\varepsilon_1,n} \leqslant v_{\varepsilon_2,n} \end{array}\right.$$

Démonstration :

(α) Démonstration de (2-9)

On établit ces propriétés par récurrence, ainsi que le fait que $u_{\varepsilon,n}$ et $v_{\varepsilon,n}$ sont définies de façon unique.

i) On a déjà par hypothèse $u_{\varepsilon,0} \leqslant v_{\varepsilon,0}$.

Pour $g \geqslant 0$ $u_{\varepsilon,1}$ et $v_{\varepsilon,1}$ sont définis par :

(2-11)
$$\left\{\begin{array}{l} A_\varepsilon(u_{\varepsilon,1}) = g \qquad g \in L^{p'}(\Omega) \\ u_{\varepsilon,1}(0) = u_{\varepsilon,1}(L) = 0 \end{array}\right.$$

(2-12)
$$\left\{\begin{array}{l} A_\varepsilon(v_{\varepsilon,1}) = g + F(\theta_o) - F(v+\theta_o) \\ v_{\varepsilon,1}(0) = v_{\varepsilon,1}(L) = 0 \end{array}\right.$$

$g + F(\theta_o) - F(v+\theta_o) \in L^{p'}(\Omega)$ puisque $F(v+\theta_o) \in L^{\infty}(\Omega)$.

Lemme 2-3

Pour $f \in L^{p'}(\Omega)$ le problème

$$(2\text{-}13) \qquad \begin{cases} A_\varepsilon(u_\varepsilon) = f \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(L) = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique u_ε telle que $u_\varepsilon \in W_o^{1,p}(\Omega)$ et

$$-\frac{d}{dx}\left(|u'_\varepsilon|^{p-2}u'_\varepsilon\right) \in L^{p'}(\Omega) \ .$$

Démonstration du lemme :

L'opérateur A_ε qui opère de $W_o^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ est borné, hémi-continu, strictement monotone, coercif. D'après un théorème classique [LIONS J.L. [1]] il y a existence et unicité d'une solution u_ε dans $W_o^{1,p}(\Omega)$ pour le problème (2-13) . Et d'après un raisonnement déjà fait, comme $f \in L^{p'}(\Omega)$, on déduit de (2-13) que $\frac{d}{dx}\left(|u'_\varepsilon|^{p-2}u'_\varepsilon\right) \in L^{p'}(\Omega)$.

D'après le lemme (2-3) les problèmes (2-11) et (2-12) ont chacun une solution unique dans $W_o^{1,p}(\Omega)$

$g \geqslant 0$ entraîne

(2-14) $\qquad A_\varepsilon(u_{\varepsilon,1}) \geqslant 0$

comme $v \geqslant 0$ $\qquad F(\theta_o) - F(v+\theta_o) \geqslant 0$ donc $A_\varepsilon(v_{\varepsilon,1}) \geqslant 0$

on en déduit $\qquad \frac{d}{dx}\left(|v'_{\varepsilon,1}|^{p-2}v'_{\varepsilon,1}\right) \leqslant 0$ p.p. dans Ω et

(2-15) $\qquad A(v_{\varepsilon,1}) \leqslant A_\varepsilon(v_{\varepsilon,1})$

(2-15) joint à l'hypothèse, v sur solution dans $W_o^{1,p}(\Omega)$, implique

(2-16) $\qquad A(v) - A(v_{\varepsilon,1}) \geqslant 0$.

De (2-16) et (2-14) on déduit :

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,1} \geqslant 0 \\ v_{\varepsilon,1} \leqslant v \end{cases}$$

ii) On suppose maintenant que les propriétés (2-9) sont vérifiées jusqu'au rang n-1 . Soient donc $u_{\varepsilon,n}$ et $v_{\varepsilon,n}$ définies par (2-7) et (2-8) .

D'après l'hypothèse de récurrence $u_{\varepsilon,n-1} \geqslant 0$ et $v_{\varepsilon,n-1} \geqslant 0$

donc $F(u_{\varepsilon,n-1}+\theta_o)$ et $F(v_{\varepsilon,n-1}+\theta_o) \in L^\infty(\Omega)$.

Le second membre de (2-7) et (2-8) est dans $L^{p'}(\Omega)$. D'après le lemme 2-3, le problème (2-7) (resp. (2-8)) possède une solution unique $u_{\varepsilon,n}$ (resp. $v_{\varepsilon,n}$) dans $W_o^{1,p}(\Omega)$.

D'après (2-7) et (2-8) écrites pour les indices n et n-1 on a :

$$(2\text{-}17) \qquad A_\varepsilon(v_{\varepsilon,n}) - A_\varepsilon(u_{\varepsilon,n}) = F(u_{\varepsilon,n-1}+\theta_o) - F(v_{\varepsilon,n-1}+\theta_o)$$

$$(2\text{-}18) \qquad A_\varepsilon(u_{\varepsilon,n}) - A_\varepsilon(u_{\varepsilon,n-1}) = F(u_{\varepsilon,n-2}+\theta_o) - F(u_{\varepsilon,n-1}+\theta_o)$$

$$(2\text{-}19) \qquad A_\varepsilon(v_{\varepsilon,n-1}) - A_\varepsilon(v_{\varepsilon,n}) = F(v_{\varepsilon,n-1}+\theta_o) - F(v_{\varepsilon,n-2}+\theta_o)$$

D'après les hypothèses de récurrence faites sur les suites $u_{\varepsilon,n}$ et $v_{\varepsilon,n}$, $v_{\varepsilon,n-i}+\theta_o$ et $u_{\varepsilon,n-i}+\theta_o$, pour $i = 1,2$ sont positifs. Sur R^+ F est décroissante. Utilisant à nouveau les hypothèses de récurrence, on en déduit que les seconds membres de (2-17) , (2-18) , (2-19) sont positifs.

(2-17) entraîne que $A_\varepsilon(v_{\varepsilon,n}) - A_\varepsilon(u_{\varepsilon,n}) \geqslant 0$

$A_\varepsilon(v_{\varepsilon,n}) \in L^{p'}(\Omega)$, $A_\varepsilon(u_{\varepsilon,n}) \in L^{p'}(\Omega)$, $v_{\varepsilon,n}$ et $u_{\varepsilon,n} \in W_o^{1,p}(\Omega)$.

Donc d'après le lemme (2-1) on a

$$v_{\varepsilon,n} \geqslant u_{\varepsilon,n}$$

De même à l'aide de (2-18) et (2-19) on déduit :

$$u_{\varepsilon,n} \geqslant u_{\varepsilon,n-1} \quad \text{et} \quad v_{\varepsilon,n-1} \geqslant v_{\varepsilon,n}$$

iii) Pour tout n $u_{\varepsilon,n-1} \geqslant 0$ donc $g+F(\theta_o) - F(u_{\varepsilon,n-1}+\theta_o) \geqslant 0$, $u_{\varepsilon,n}$ solution de (2-7) est telle que

$$\frac{d}{dx}\left(|u'_{\varepsilon,n}|^{p-2}u'_{\varepsilon,n}\right) \in L^{p'}(\Omega) \quad \text{et que} \quad A_\varepsilon(u_{\varepsilon,n}) \geqslant 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

d'où $\frac{d}{dx}\left(|u'_{\varepsilon,n}|^{p-2}u'_{\varepsilon,n}\right) \leqslant 0$ p.p. dans Ω (de même pour $v_{\varepsilon,n}$) .

Utilisant les propriétés de la suite $u_{\varepsilon,n}$ et de la suite $v_{\varepsilon,n}$ on a :

$$0 \leqslant u_{\varepsilon,n-1} \leqslant u_{\varepsilon,n}$$

$$0 \leqslant u_{\varepsilon,n} \leqslant v$$

$$0 \leqslant v_{\varepsilon,n} \leqslant v_{\varepsilon,n-1} \leqslant v$$

$u_{\varepsilon,n}$, v , $v_{\varepsilon,n}$ remplissent les conditions d'application du lemme 2-2 .

D'où $|u'_{\varepsilon,n-1}|_{L^p(\Omega)} \leqslant |u'_{\varepsilon,n}|_{L^p(\Omega)} \leqslant |v'|_{L^p(\Omega)}$

$|v'_{\varepsilon,n}|_{L^p(\Omega)} \leqslant |v'_{\varepsilon,n-1}|_{L^p(\Omega)} \leqslant |v'|_{L^p(\Omega)}$.

(β) Démonstration des propriétés 2-10

Cette démonstration se fait également par récurrence sur n .

Soit $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant 0$

i) On a $u_{\varepsilon_1,0} = u_{\varepsilon_2,0}$ et $v_{\varepsilon_1,0} = v_{\varepsilon_2,0} = v$.

Donc $A_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1,1}) - A_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2,1}) = 0$.

De même $A_{\varepsilon_1}(v_{\varepsilon_1,1}) - A_{\varepsilon_2}(v_{\varepsilon_2,1}) = 0$.

Comme $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2$ et $\frac{d}{dx}(|u'_{\varepsilon_1,1}|^{p-2}u'_{\varepsilon_1,1}) \leqslant 0$ on a :

$A_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1,1}) \geqslant A_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_1,1})$ de même pour $v_{\varepsilon_1,1}$.

On a donc $A_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_1,1}) - A_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2,1}) \leqslant 0$.

D'où en appliquant le lemme (2-1)

$$u_{\varepsilon_1,1} \leqslant u_{\varepsilon_2,1}$$

$$v_{\varepsilon_1,1} \leqslant v_{\varepsilon_2,1}$$

ii) Supposons maintenant

$$u_{\varepsilon_1,n-1} \leqslant u_{\varepsilon_2,n-1}$$

et $$v_{\varepsilon_1,n-1} \leqslant v_{\varepsilon_2,n-1}$$

Utilisant (2-7) et (2-8) écrites pour ε_1 et ε_2 on a :

(2-20) $$A_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1,n}) - A_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2,n}) = F(u_{\varepsilon_2,n-1}+\theta_o) - F(u_{\varepsilon_1,n-1}+\theta_o)$$

et (2-20) bis) obtenue en remplaçant u par v dans (2-20)

$\frac{d}{dx}(|u'_{\varepsilon_1,n}|^{p-2}u'_{\varepsilon_1,n}) \leqslant 0$ et $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2$ entraînent comme précédemment $A_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1,n}) \geqslant A_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_1,n})$.

D'où $$A_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_1,n}) - A_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2,n}) \leqslant F(u_{\varepsilon_2,n-1}+\theta_o) - F(u_{\varepsilon_1,n-1}+\theta_o) .$$

Utilisant les propriétés de F et l'hypothèse de récurrence

$$A_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_1,n}) - A_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2,n}) \leqslant 0$$

Et d'après le lemme (2-1)

$$u_{\varepsilon_1,n} \leqslant u_{\varepsilon_2,n}$$

De même $$v_{\varepsilon_1,n} \leqslant v_{\varepsilon_2,n}$$

Remarque 2-4

Pour $g \geqslant 0$ la fonction 0 est un cas particulier de sous solution pour $P(\theta_o, L, g)$.

Pour $g \leqslant 0$ la fonction 0 est un cas particulier de sur solution pour $P(\theta_o, L, g)$.

Passage à la limite sur n et ε

On déduit de la proposition (2-1) que :

(2-21) $u_{\varepsilon,n}$ et $v_{\varepsilon,n}$ sont dans un borné de $W_o^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$.

$$(2\text{-}22) \quad \begin{cases} F(u_{\varepsilon,n-1}+\theta_o) \leqslant F(\theta_o) \\ F(u_{\varepsilon,n-1}+\theta_o)u_{\varepsilon,n} \leqslant F(\theta_o)v \end{cases}$$

Et on a également (2-22) avec $v_{\varepsilon,n}$.

On fait tendre ε vers 0 , n étant fixé.

Il résulte de (2-21) que l'on peut extraire une sous-suite $u_{\varepsilon',n}$ convergeant vers u_n dans $W_o^{1,p}(\Omega)$ faible.

Par compacité de l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ on peut extraire une nouvelle sous-suite notée toujours $u_{\varepsilon',n}$ telle que

$$u_{\varepsilon',n} \to u_n \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega) \quad \text{fort et p.p.}$$

D'après les propriétés (2-10) , pour n fixé, la suite $u_{\varepsilon,n}$ est monotone en ε , c'est donc toute la suite $u_{\varepsilon,n}$ qui converge vers u_n dans $L^p(\Omega)$ fort et p.p.

On peut alors passer à la limite dans (2-7) (en utilisant (2-22)) .
On voit ainsi que u_n est solution de :

$$(2\text{-}23) \quad \begin{cases} A(u_n) + F(u_{n-1}+\theta_o) = g + F(\theta_o) \\ u_n(0) = u_n(L) = 0 \\ \text{avec} \quad u_o = 0 \end{cases}$$

Remarque 2-5

Puisque $\Omega =]0,L[$ et que $u_n \in W_o^{1,p}(\Omega)$, u_n est alors continue. La suite $u_{\varepsilon,n}$ monotone convergeant simplement vers u_n , avec $u_{\varepsilon,n}$ et $u_n \in C^o(\bar{\Omega})$, d'après le lemme de Dini on conclut qu'il y a convergence uniforme de la suite $u_{\varepsilon,n}$ vers u_n .

De manière analogue $v_{\varepsilon,n}$ converge uniformément vers v_n solution de :

$$(2\text{-}23\ \text{bis}) \quad \begin{cases} A(v_n) + F(v_{n-1}+\theta_o) = g+F(\theta_o) \\ v_n(0) = v_n(L) = 0 \\ \text{avec} \quad v_o = v \end{cases}$$

Les suites u_n et v_n ainsi définies sont encore monotones et $u_n \leqslant v_n$ (ceci résulte de (2-9)).

Par un raisonnement analogue au précédent, on établit la convergence uniforme de la suite u_n toute entière (respectivement v_n) vers u_{min} (resp. u_{max}) appartenant à $W_o^{1,p}(\Omega)$ solution de $P(\theta_o,L,g)$.

Soit maintenant z une solution de $P(\theta_o,L,g)$ dans $W_o^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$u_o \leqslant z \leqslant v_o \quad .$$

Par récurrence on montre que $u_n \leqslant z \leqslant v_n$.

En passant à la limite sur n on a $u_{min} \leqslant z \leqslant u_{max}$.

Remarque 2-6

On aurait pu effectuer le passage à la limite tout d'abord sur n et ensuite sur ε .

Dans un premier temps, et utilisant (2-9) , on a convergence uniforme de la suite $u_{\varepsilon,n}$ vers u_ε solution de $P_\varepsilon(\theta_o,L,g)$.

D'après (2-10) on a $u_{\varepsilon_1} \leqslant u_{\varepsilon_2}$ pour $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 > 0$ (dans le cas $g \geqslant 0$) et à nouveau convergence uniforme de u_ε vers u solution de $P(\theta_o,L,g)$.

Cependant le premier passage à la limite est plus intéressant car il fournit un procédé d'approximation de solutions de $P(\theta_o,L,g)$ à l'aide des solutions des problèmes (2-23) et (2-23 bis).

2-3 AUTRE METHODE DE SUITE MONOTONE

Cette deuxième méthode à l'intérêt de fournir un procédé simple d'approximation de solutions pour $P(\theta_o,L,g)$ car on aura à résoudre, pour déterminer chaque terme des suites considérées, un problème de Dirichlet.

On fait alors les hypothèses suivantes :

(2-24) $g \in L^2(\Omega)$ [1] , $g \geqslant 0$ dans Ω (resp. $g \leqslant 0$)

(2-25) $g(x) = g(L-x)$ dans Ω

(2-26) Le problème $P(\theta_o, L, g)$ possède une sur solution $v \in H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ (respectivement une sous solution $w \leqslant 0$) vérifiant de plus $v(x) = v(L-x)$ dans Ω .

On considère les suites u_n et v_n définies de la manière suivante :

(2-27)
$$\begin{cases} -u''_n = \left[g+F(\theta_o) - F(u_{n-1}+\theta_o)\right] \quad (1+u'^2_{n-1})^{3/2} \\ u_n(0) = u_n(L) = 0 \\ u_o = 0 \qquad \text{(respectivement } u_o = w) \end{cases}$$

(2-28)
$$\begin{cases} -v''_n = \left[g+F(\theta_o) - F(v_{n-1}+\theta_o)\right] \quad (1+v'^2_{n-1})^{3/2} \\ v_n(0) = v_n(L) = 0 \\ v_o = v \qquad \text{(respectivement } v_o = 0). \end{cases}$$

Proposition 2-2

(2-29)
- u_n et v_n appartiennent à $C^1(\bar{\Omega})$.
- la suite u_n est monotone croissante, la suite v_n est monotone décroissante et $u_n \leqslant v_n$.
- la suite $|u'_n(x)|$ est monotone croissante (resp. décroissante).

  la suite $|v'_n(x)|$ est monotone décroissante (resp. croissante) et

  $|v'_n(x)| \geqslant |u'_n(x)|$.

  D'autre part $u_n(x) = u_n(L-x)$ $u'_n(x) = -u'_n(L-x)$ (de même pour v_n).

Pour démontrer cette proposition on utilise le lemme suivant :

Lemme 2-4

Soit $f \in L^1(\Omega)$ telle que $f(x) = f(L-x)$ p.p. dans Ω .

Alors la solution de

(2-30)
$$\begin{cases} -y'' = f \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

vérifie $y(x) = y(L-x)$, $y'(x) = -y'(L-x)$

Si de plus $f \geqslant 0$ (resp. $f \leqslant 0$)

alors $y' \geqslant 0$ (resp. $y' \leqslant 0$) sur $\left[0, \frac{L}{2}\right)$

---

(1)) a supposé $g \in L^2(\Omega)$ ceci n'est pas indispensable.

Démonstration du lemme

Soit $K(x,t) = \begin{cases} -\frac{x}{L}(t-L) & \text{si } x \leqslant t \\ -\frac{t}{L}(x-L) & \text{si } x > t \end{cases}$

Alors la solution du problème (2-30) est donnée par :

(2-31) $$y(x) = \int_\Omega K(x,t)\ f(t)dt$$

Dans l'expression de $y(L-x)$ effectuons le changement de variable $L-t = v$

$$y(L-x) = \int_\Omega K(L-x,L-v)\ f(v)dv$$

or $K(L-x,L-v) = K(x,v)$

D'où $y(x) = y(L-x)$

De même on a $y'(x) = -y'(L-x)$ donc $y'(\frac{L}{2}) = 0$.

La dernière partie du lemme (2-4) est immédiate en intégrant (2-30) sur $\left[x\ ,\ \frac{L}{2}\right]$.

Démonstration de la proposition 2-2

On fait la démonstration dans le cas $g \geqslant 0$.

On établit les propriétés (2-29) par récurrence

i) On a $u_o \leqslant v_o$ par hypothèse

u_o et v_o vérifient les conditions de symétrie

u_1 est définie par :

(2-32) $$\begin{cases} -u''_1 = g \\ u_1(0) = u_1(L) = 0 \end{cases}$$

$g \in L^2(\Omega)$ et $g \geqslant 0$ dans Ω .

On déduit de (2-32) que $u_1 \in C^1(\bar{\Omega})$ et $u_1 \geqslant 0$ (soit $u_1 \geqslant u_o$) .

Il est clair que $|u'_1(x)| \geqslant |u'_o(x)|$

v_1 est définie par :

(2-33) $$\begin{cases} -v''_1 = [g+F(\theta_o) - F(v+\theta_o)]\ (1+v'^2)^{3/2} \\ v_1(0) = v_1(L) = 0 \end{cases}$$

Utilisant l'hypothèse (2-26) on a :

$v \in C^1(\bar{\Omega})$ d'où on déduit que :

$h = (g+F(\theta_o) - F(v+\theta_o))\ (1+v'^2)^{3/2} \in L^2(\Omega)$

$h(x) = h(L-x)$ et $h(x) \geq 0$ p.p. dans Ω .

Appliquant le lemme (2-4) on a $v'_1(x) = -v'_1(L-x)$ et $v'_1(x) \geq 0$ sur $[0,\frac{L}{2}]$.

D'après (2-33) et l'hypothèse (2-26) on a :

$$(2\text{-}34) \qquad \begin{cases} -v'' + v''_1 \geq 0 \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega \\ (v-v_1)(0) = (v-v_1)(L) = 0 \end{cases}$$

On déduit de (2-34) , que $v \geq v_1$.

Intégrons maintenant (2-34) sur $[x,\frac{L}{2}]$. Utilisant les propriétés de v' et v'_1 on obtient $|v'(x)| \geq |v'_1(x)|$ p.p. dans Ω .

ii) Supposons les propriétés (2-29) vérifiées jusqu'au rang n-1 .

— Soient u_n et v_n solutions respectives de (2-27) et (2-28) .
D'après l'hypothèse de récurrence u_{n-1} et v_{n-1} sont dans $C^1(\bar{\Omega})$.

Et comme $u_o \leq u_{n-1}$ on a $F(u_{n-1}+\theta_o) \in L^\infty(\Omega)$.

D'où $[g+F(\theta_o) - F(u_{n-1}+\theta_o)]\ (1+u'^2_{n-1})^{3/2} \in L^2(\Omega)$.

La solution u_n de (2-27) est donc dans $C^1(\bar{\Omega})$. De même pour v_n .

Utilisant (2-27) pour n et n-1 on a

$$-u''_n+u''_{n-1} = [g+F(\theta_o)-F(u_{n-1}+\theta_o)](1+u'^2_{n-1})^{3/2}-[g+F(\theta_o)-F(u_{n-2}+\theta_o)](1+u'^2_{n-2})^{\frac{3}{2}}.$$

On a des expressions analogues pour $-v''_{n-1}+v''_n$ et pour $-v''_n+u''_n$.

Par hypothèse $u_{n-1} \geq u_{n-2} \geq 0$.

D'après les propriétés de F et l'hypothèse $g \geq 0$ on obtient :

$$(2\text{-}35) \qquad g + F(\theta_o) - F(u_{n-1}+\theta_o) \geq g+F(\theta_o) - F(u_{n-2}+\theta_o) \geq 0$$

Par hypothèse également $|u'_{n-1}| \geq |u'_{n-2}|$ d'où :

$$(2\text{-}36) \qquad (1+u'^2_{n-1})^{3/2} \geq (1+u'^2_{n-2})^{3/2}$$

(2-35) et (2-36) entraînent alors

$$(2\text{-}37) \qquad -u''_n + u''_{n-1} \geq 0$$

(De manière analogue on a $-v''_{n-1}+v''_n \geq 0$ et $-v''_n + u''_n \geq 0$).

On déduit de ces inégalités :

$$u_n \geq u_{n-1} \quad , \quad v_n \leq v_{n-1} \quad \text{et} \quad u_n \leq v_n$$

— D'après les propriétés de symétrie de u'_{n-1} et u_{n-1} et le lemme (2-4) on a $u_n(x) = u_n(L-x)$ et $u'_n(x) = -u'_n(L-x)$. Intégrant (2-37) sur $[x,\frac{L}{2}]$ et utilisant les propriétés de u'_n et u'_{n-1} on obtient

$$|u'_n(x)| \geq |u'_{n-1}(x)|$$

(de façon analogue on a $|v'_n(x)| \leq |v'_{n-1}(x)|$ et $|v'_n(x)| \geq |u'_n(x)|$) .

Proposition 2-3

Les suites u_n et v_n définies par (2-27) et (2-28) convergent uniformément vers u_{min} et u_{max} solutions de $P(\theta_o,L,g)$

u_{min} et u_{max} appartiennent à $C^1(\bar{\Omega})$.

Démonstration

D'après la proposition 2-2 $|u_n(x)|$ et $|u'_n(x)|$ sont majorées uniformément par $v(x)$ et $|v'(x)|$.

D'après le théorème d'Ascoli Arzela, et la monotonie de la suite u_n il y a convergence uniforme de toute la suite u_n dans Ω vers u_{min} .

Puisque u_n et u'_n sont bornés uniformément on a :

$$(2\text{-}38) \qquad |(g+F(\theta_o) - F(u_{n-1}+\theta_o))\ (1+u'^2_{n-1})^{3/2}| \leq f(x) \quad \text{où} \quad f \in L^2(\Omega)$$

(2-27) et (2-38) entraînent alors :

$$\int_\Omega u''^2_n \, dx \leq \int_\Omega |u''_n| f(x) \, dx$$

d'où on déduit que u''_n est dans un borné de $L^2(\Omega)$.

u_n étant dans un borné de $H^2(\Omega)$, on peut extraire de la suite u_n une sous-suite u_ν telle que $u'_\nu \to u'_{min}$ dans $L^2(\Omega)$ fort et presque partout. Mais la suite u'_n étant monotone, il y a convergence de toute la suite u'_n , et pas seulement d'une sous-suite, vers u'_{min} dans $L^2(\Omega)$ fort et p.p.

(2-27) équivaut à

$$(2\text{-}39) \qquad u_n(x) = \int_\Omega K(x,t)\ [g+F(\theta_o) - F(u_{n-1}+\theta_o)]\ [1+u'^2_{n-1}]^{3/2} \, dt \ .$$

On passe à la limite dans (2-39) à l'aide du théorème de Lebesgue, d'où il est ensuite facile de conclure que u_{min} est solution de $P(\theta_o,L,g)$.

Remarque 2-7

Comme $u_{min} \in H^2(\Omega)$ on a $u_{min} \in C^1(\overline{\Omega})$; $u'_n \in C^o(\overline{\Omega})$, et la suite u'_n monotone converge vers u'_{min} continue. La convergence est donc uniforme.

Remarque 2-8

On démontre de façon identique que v_n converge vers u_{max} solution de $P(\theta_o,L,g)$.

Si z est une solution de $P(\theta_o,L,g)$ telle que $0 \leqslant z \leqslant v$ (resp. $w \leqslant z \leqslant 0$) avec $|z'(x)| \leqslant |v'(x)|$ (resp. $|z'(x)| \leqslant |w'(x)|$) alors $u_{min} \leqslant z \leqslant u_{max}$.

2-4 CAS OU g N'EST PAS DE SIGNE CONSTANT. THEOREME D'EXISTENCE

Pour cette étude on fait les hypothèses suivantes :

(2-40) $g \in L^q(\Omega)$, $q > 1$.

(2-41) Le problème $P(\theta_o,L,g)$ admet une sous-solution w et une sur solution v telles que :

i/ $v,w \in W^{1,p}(\Omega)$ (avec $q \geqslant p'$)

ii/ $\frac{d}{dx}(|w'|^{p-2}w') \in L^{p'}(\Omega)$ et $\frac{d}{dx}(|w'|^{p-2}w') \geqslant 0$ p.p. dans Ω

iii/ $\frac{d}{dx}(|v'|^{p-2}v') \in L^{p'}(\Omega)$ et $\frac{d}{dx}(|v'|^{p-2}v') \leqslant 0$ p.p. dans Ω

(2-42) $\max\left(\int_\Omega |g+F(\theta_o)-F(v+\theta_o)|dx \ , \int_\Omega |g+F(\theta_o) - F(w+\theta_o)|dx\right) \leqslant k$ avec $k < 1$.

Remarque 2-9

L'hypothèse (2-41) entraîne que v et w appartiennent à $C^1(\overline{\Omega})$ et que $w \leqslant 0 \leqslant v$.

Théorème 2-2

Sous les hypothèses (2-40) , (2-41) , (2-42) , le problème $P(\theta_o,L,g)$ admet une solution minimale u_{min} et une solution maximale u_{max} dans $C^1(\overline{\Omega}) \cap [w,v]$.

Démonstration

i) Majorations à priori

Les hypothèses (2-41 ii) et (2-41 iii), entraînent que w et v sont respectivement sous solution et sur solution pour le problème $P_\varepsilon(\theta_o,L,g)$ pour tout ε positif (le problème P_ε correspond toujours à l'opérateur A_ε donné par (2-3)).

On peut alors comme au paragraphe 2-2 construire une suite $u_{\varepsilon,n}$ et une suite $v_{\varepsilon,n}$ solutions de (2-7) et (2-8) telles que :

$$\left|\begin{array}{l} \text{La suite } u_{\varepsilon,n} \text{ est monotone croissante, } u_{\varepsilon,0} = w \\ \text{La suite } v_{\varepsilon,n} \text{ est monotone décroissante, } v_{\varepsilon,0} = v \\ \text{et } u_{\varepsilon,n} \leqslant v_{\varepsilon,n} \end{array}\right.$$

Par contre on n'a pas, dans ce cas, de propriétés de monotonie pour les suites $|u'_{\varepsilon,n}|_{L^p(\Omega)}$ et $|v'_{\varepsilon,n}|_{L^p(\Omega)}$.

On va établir ici directement des majorations pour $u'_{\varepsilon,n}$ et $v'_{\varepsilon,n}$ dans $L^\infty(\Omega)$.

$u_{\varepsilon,n}$ est solution de :

$$A_\varepsilon(u_{\varepsilon,n}) = g + F(\theta_o) - F(u_{\varepsilon,n-1}+\theta_o) \tag{2-43}$$

$$u_{\varepsilon,n}(0) = u_{\varepsilon,n}(L) = 0 \tag{2-44}$$

(2-43) entraîne que $u''_{\varepsilon,n} \in L^{p'}(\Omega)$ (cf. § 1-3-1), d'où $u_{\varepsilon,n} \in C^1(\bar{\Omega})$.

Ceci joint à (2-44) implique qu'il existe $\lambda_{\varepsilon,n} \in \Omega$ tel que $u'_{\varepsilon,n}(\lambda_{\varepsilon,n}) = 0$.

Intégrons (2-43) sur $[x,\lambda_{\varepsilon,n}]$

$$\varepsilon\, u'_{\varepsilon,n}(x)|u'_{\varepsilon,n}(x)|^{p-2} + \frac{u'_{\varepsilon,n}(x)}{\sqrt{1+u'_{\varepsilon,n}(x)^2}} = \int_x^{\lambda_{\varepsilon,n}} (g+F(\theta_o)-F(u_{\varepsilon,n-1}+\theta_o))dt. \tag{2-45}$$

D'après les propriétés de F et celles de la suite $u_{\varepsilon,n}$ on a

$$g+F(\theta_o)-F(w+\theta_o) \leqslant g+F(\theta_o)-F(u_{\varepsilon,n-1}+\theta_o) \leqslant g+F(\theta_o)-F(v+\theta_o) \tag{2-46}$$

d'où $$\left|\int_x^{\lambda_{\varepsilon,n}} (g+F(\theta_o)-F(u_{\varepsilon,n-1}+\theta_o))dt\right|$$

$$\leqslant \max\left\{\left|\int_x^{\lambda_{\varepsilon,n}} (g+F(\theta_o)-F(w+\theta_o))dt\right|, \left|\int_x^{\lambda_{\varepsilon,n}} (g+F(\theta_o)-F(v+\theta_o))dt\right|\right\}.$$

Or $$\left|\int_x^{\lambda_{\varepsilon,n}} (g+F(\theta_o)-F(w+\theta_o))dt\right| \leqslant \int_\Omega |g+F(\theta_o)-F(w+\theta_o)|dt$$

de même $$\left|\int_x^{\lambda_{\varepsilon,n}} g+F(\theta_o)-F(v+\theta_o)dt\right| \leqslant \int_\Omega |g+F(\theta_o)-F(v+\theta_o)|dt .$$

De l'égalité (2-45) et de l'hypothèse (2-42) on déduit

$$\left|\varepsilon \quad |u'_{\varepsilon,n}(x)|^{p-2}u'_{\varepsilon,n}(x) + \frac{u'_{\varepsilon,n}(x)}{\sqrt{1+u'_{\varepsilon,n}(x)^2}}\right| \leq k$$

d'où $$\left|\frac{u'_{\varepsilon,n}(x)}{\sqrt{1+u'_{\varepsilon,n}(x)^2}}\right| \leq k < 1$$

et finalement $$|u'_{\varepsilon,n}(x)| \leq \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

On montre de même que

$$|v'_{\varepsilon,n}(x)| \leq \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

ii) Passage à la limite

$u_{\varepsilon,n}$ et $v_{\varepsilon,n}$ sont dans un borné de $W_o^{1,\infty}(\Omega)$. Ceci nous permet de passer à la limite toujours par monotonie et compacité dans (2-7) et (2-8) . Passons à la limite sur ε .

De la suite $u_{\varepsilon,1}$ on extrait une sous-suite $u_{\varepsilon_1,1}$ convergeant uniformément vers u_1 , $u_1 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et est solution de

$$A(u_1) = g + F(\theta_o) - F(w+\theta_o)$$

Puis de la suite $u_{\varepsilon_1,2}$ on extrait une sous-suite $u_{\varepsilon_2,2}$ convergeant uniformément vers u_2 .

Par extractions successives de sous-suites, la suite $u_{\varepsilon_n,n}$ extraite de $u_{\varepsilon_{n-1},n}$ converge uniformément vers u_n .

$u_n \in W_o^{1,\infty}\Omega$ et vérifie :

$$A(u_n) = g + F(\theta_o) - F(u_{n-1}+\theta_o)$$

On définit ainsi une nouvelle suite u_n avec $u_o = w$.

De même on définit une suite v_n avec $v_o = v$.

Ces deux suites sont encore monotones.

Faisant tendre n vers l'infini, ces deux suites convergent uniformément vers u_{min} et u_{max} appartenant à $W_o^{1,\infty}(\Omega)$ solutions de $P(\theta_o,L,g)$.
Si z est une solution de $P(\theta_o,L,g)$ avec $u_o \leq z \leq v_o$.
par récurrence $u_n \leq z \leq v_n$ d'où $u_{min} \leq z \leq u_{max}$.

Remarque 2-10

Puisque $u_{min} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et est solution de $P(\theta_o,L,g)$, on a $u''_{min} \in L^q(\Omega)$ lorsque $g \in L^q(\Omega)$. D'où $u_{min} \in C^1(\bar{\Omega})$; de même $u_{max} \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2-11

Le théorème 2-2 est encore vrai lorsqu'on remplace l'hypothèse (2-42) par l'hypothèse suivante :

(2-42 bis) $\max(|\int_\Omega A(w)dx| , |\int_\Omega A(v)dx|) \leq k$ avec $k < 1$.

En effet utilisant (2-46) et le fait que v et w sont sur solution et sous solution de $P(\theta_o,L,g)$ on obtient :

$$|\varepsilon u'_{\varepsilon,n}(x)|u'_{\varepsilon,n}(x)|^{p-2} + \frac{u'_{\varepsilon,n}(x)}{\sqrt{1+u'_{\varepsilon,n}(x)^2}}| \leq \max(|\int_x^{\lambda_{\varepsilon,n}} A(w)dt| , |\int_x^{\lambda_{\varepsilon,n}} A(v)dt|).$$

D'autre part d'après (2-41 ii) w' est monotone croissante
d'après (2-41 iii) v' est monotone décroissante, d'où

$$|\int_x^{\lambda_{\varepsilon,n}} A(w)dt| \leq |\int_\Omega A(w)dt| = \frac{w'(L)}{\sqrt{1+w'(L)^2}} - \frac{w'(0)}{\sqrt{1+w'(0)^2}}$$

$$|\int_x^{\lambda_{\varepsilon,n}} A(v)dt| \leq |\int_\Omega A(v)dt| = \frac{v'(0)}{\sqrt{1+v'(0)^2}} - \frac{v'(L)}{\sqrt{1+v'(L)^2}}$$

L'hypothèse (2-42 bis) permet alors d'obtenir :

$$|u'_{\varepsilon,n}(x)| \leq \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$ et on termine comme précédemment.

2-5 UN RESULTAT D'UNICITE DANS LE CAS OU $F(u) = \frac{1}{u}$

Théorème 2-3

Sous les hypothèses :

i) (2-40) (2-41),(2-42) [ou (2-42 bis)]

ii) (2-47) $L \leq \sqrt{2}\,(1-k^2)^{3/4}\,(\inf_{x\in\Omega}(w(x) + \theta_o)$

Il existe une seule fonction $u \in [w,v] \cap C^1(\bar{\Omega})$ solution de $P(\theta_o,L,g)$.

Démonstration

Soient u_1 et u_2 deux solutions de $P(\theta_o,L,g)$ vérifiant

(2-48) $\qquad w \leq u_i \leq v \qquad i = 1,2$

on a $\qquad A(u_1) - A(u_2) + \dfrac{1}{u_1+\theta_o} - \dfrac{1}{u_2+\theta_o} = 0$

Posant $z = u_1 - u_2$, on a :

(2-49) $$\int_\Omega \left(\frac{u'_1}{\sqrt{1+u'^2_1}} - \frac{u'_2}{\sqrt{1+u'^2_2}} \right) z' \, dx - \int_\Omega \frac{z^2}{(u_1+\theta_o)(u_2+\theta_o)} \, dx = 0 \quad .$$

D'autre part d'après (2-48)

$$g+F(\theta_o) - F(w+\theta_o) \leq A(u_i) \leq g+F(\theta_o) - F(v+\theta_o)$$

Effectuant les mêmes calculs que dans la démonstration du théorème (2-2) on obtient :

(2-50) $$|u'_i(x)| \leq \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

Par ailleurs $\exists\, \theta \in]0,1[$ tel que

$$\frac{u'_1(x)}{\sqrt{1+u'^2_1(x)}} - \frac{u'_2(x)}{\sqrt{1+u'^2_2(x)}} = (u'_1(x)-u'_2(x)) \; \frac{1}{(1+[u'_2(x)+\theta(u'_1(x)-u'_2(x))]^2)^{3/2}}$$

Et d'après (2-50)

$$\frac{1}{(1+[u'_2(x)+\theta(u'_1(x)-u'_2(x))]^2)^{3/2}} \geq (1-k^2)^{3/2}$$

De plus $$\frac{1}{(u_1+\theta_o)(u_2+\theta_o)} \leq \frac{1}{(\inf\limits_{x \in \Omega} w(x)+\theta_o)^2}$$

Compte tenu de toutes ces majorations on a :

$$(1-k^2)^{3/2} \int_\Omega z'^2 dx \leq \frac{1}{(\inf\limits_{x \in \Omega} w(x)+\theta_o)^2} \int_\Omega z^2 \, dx$$

Et on déduit de l'inégalité de Poincaré

$$(1-k^2)^{3/2} \int_\Omega z'^2 dx \leq \frac{L^2}{2(\inf\limits_{x \in \Omega} w(x)+\theta_o)^2} \int_\Omega z'^2 dx \quad .$$

Par suite si $L \leq \sqrt{2} \; (\inf\limits_{x \in \Omega} w(x) + \theta_o) \; (1-k^2)^{3/4}$

on a $\qquad z \equiv 0 \quad$ sur $\quad \Omega \quad$ d'où le théorème.

Remarque 2-12

Dans le cas particulier où $g \geqslant 0$ (resp. $g \leqslant 0$), supposons les hypothèses du théorème (2-1) vérifiées avec $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ (resp. $w \in W^{1,\infty}(\Omega)$) .
Soit u_i solution de $P(\theta_o,L,g)$ $0 \leqslant u_i \leqslant v$ (resp. $w \leqslant u_i \leqslant 0$) .
Dans ce cas (2-50) est remplacé par $|u'_i(x)| \leqslant |v'|_{L^\infty(\Omega)}$.
(resp. $|u'_i(x)| \leqslant |w'|_{L^\infty(\Omega)}$) .

2-6 UNE REMARQUE SUR L'UTILISATION D'UN RESULTAT DE J.P. PUEL

Dans ce paragraphe on se propose d'étudier le problème en utilisant des résultats de J.P. PUEL (1) concernant des problèmes du type :

$$(2\text{-}51) \qquad \begin{cases} A(u) + f(u) = 0 & \text{dans } \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \\ u/\partial\Omega = 0 \end{cases}$$

Supposant l'existence d'une sous solution ϕ et d'une sur solution Ψ du problème (2-51) et moyennant des hypothèses convenables sur A,f,ϕ et Ψ J.P. PUEL considère l'inéquation variationnelle associée au problème (2-51) relative au convexe $[\phi,\Psi]$ et démontre que toute solution de l'inéquation est en fait solution de l'équation.

On appliquera ceci au problème $P_\varepsilon(\theta_o,L,g)$

$$(2\text{-}52) \qquad \begin{cases} -\varepsilon u''_\varepsilon - \dfrac{d}{dx}\dfrac{u'_\varepsilon}{\sqrt{1+u'^2_\varepsilon}} + F(u_\varepsilon+\theta_o) = g + F(\theta_o) & \text{dans }]0,L[\\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(L) = 0 \quad . \end{cases}$$

Pour simplifier on suppose que $g \in L^2(\Omega)$ (Mais pour $g \in L^q(\Omega)$, $1 < q < 2$. on pourrait également considérer le problème $P(\theta_o,L,g)$ perturbé avec le pseudo-laplacien).

Proposition 3-1

On suppose qu'il existe w et v dans $H^2(\Omega)$ respectivement sous solution et sur solution de $P(\theta_o,L,g)$, (au sens des définitions (2-1) et (2-2) vérifiant de plus :

(2-53) $\quad w'' \geqslant 0$ p.p. dans Ω et $v'' \leqslant 0$ p.p. dans Ω

Alors le problème (2-52) admet une solution $u_\varepsilon \in K$

où $\quad K = \{y/y \in H^1_o(\Omega) \ , \ w \leqslant y \leqslant v \text{ p.p. dans } \Omega\}$.

Montrons que l'on est dans les conditions d'application du théorème de J.P. PUEL.

2-53 i Les hypothèses faites sur v et w entraînent que, pour tout $\varepsilon > 0$, v et w remplissent les conditions voulues concernant les sur solutions et sous solutions de $P_\varepsilon(\theta_o, L, g)$.

2-53 ii Soit f définie par $f(u) = F(u+\theta_o) - F(\theta_o) - g$

. f est une application bornée de K dans $L^2(\Omega)$ et

$$\forall u \in K \quad |f(u)|_{L^2(\Omega)} \leqslant |g+F(\theta_o)|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{L}\ F(\alpha)$$

. f est continue de K dans $L^2(\Omega)$.

Soit en effet une suite u_n telle que $u_n \to u$ dans K

$$\int_\Omega |f(u_n)-f(u)|^2 dx = \int_\Omega |F(u_n+\theta_o) - F(u+\theta_o)|^2\ dx$$

u_n convergeant vers u pour la norme de $H_o^1(]0,L[)$, il y a convergence pour la norme de $C^o([0,L])$, donc $u_n(x) \to u(x)$ dans Ω et, F étant continue, $F(u_n(x)+\theta_o) \to F(u(x)+\theta_o)$ dans Ω.

Puisque u_n et u sont dans K, $|F(u_n+\theta_o) - F(u+\theta_o)| \leqslant 2F(\alpha)$.

Appliquant le théorème de Lebesgue on a bien

$$|f(u_n) - f(u)|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

. f est décroissante, c'est-à-dire que $\forall u,v \in K$ tels que $u \leqslant v$ p.p. alors $f(u) \geqslant f(v)$.

2-53 iii Soit A_ε défini par $A_\varepsilon(u) = -\varepsilon u'' - \dfrac{d}{dx}\ \dfrac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}$

Le théorème de PUEL est démontré pour A opérateur différentiel linéaire à partie principale elliptique du 2ème ordre.

L'opérateur A_ε considéré ici n'est pas linéaire mais il est borné de $H_o^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, hémicontinu, monotone et coercif au sens suivant :

il existe $u_o \in K$ tel que

$$\frac{(A_\varepsilon(u), u-u_o)}{||u||_{H_o^1(\Omega)}} \to +\infty \quad \text{si} \quad ||u||_{H_o^1(\Omega)} \to \infty\ , \quad u \in K$$

(on peut choisir ici $u_o = 0$).

On constate que ces propriétés de A_ε sont alors suffisantes pour assurer la validité des conclusions du théorème de J.P. PUEL.

L'existence d'une solution u_ε de (2-52) étant assurée, pour le passage à la limite sur ε, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires (pour que $|u'_\varepsilon|_{L^2(\Omega)}$ soit bornée indépendamment de ε).

Pour cela il suffit de procéder comme au paragraphe 2-4.

CHAPITRE III

RECHERCHE DE SOUS SOLUTIONS ET SUR SOLUTIONS PARTICULIERES

On va donner dans ce chapitre des conditions suffisantes pour que les hypothèses des théorèmes 2-1 et 2-2 soient remplies, ce qui nous conduit à chercher des sous solutions et sur solutions pour le problème $P(\theta_o,L,g)$.

On étudie de manière détaillée au § 3-2 le cas où $F(u) = \frac{1}{u}$.

Remarque 3-1

Soit $g \in L^q(\Omega)$, $q > 1$, on a déjà vu que

lorsque $g \geqslant 0$ p.p. , 0 est sous solution pour $P(\theta_o,L,g)$.

lorsque $g \leqslant 0$ p.p. , 0 est sur solution pour $P(\theta_o,L,g)$.

3-1 CONDITIONS FAISANT INTERVENIR $|g|_{L^1(\Omega)}$

Proposition 3-1

Soit $g \in L^q(\Omega)$, $q > 1$.
Pour que le problème $P(\theta_o,L,g)$ ait une sur solution $v \geqslant 0$ et une sous solution $w \leqslant 0$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$ il est nécessaire que :

$$\sup_{x,x' \in [0,L]} \left| \int_x^{x'} g(t)dt \right| \leqslant 2$$

Lorsque g est de signe constant cette condition devient :

$$|g|_{L^1(\Omega)} \leqslant 2$$

Démonstration

Il suffit d'intégrer (2-1) et (2-2) sur $[x,x']$ $(x \leq x')$

$$\left[-\frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}}\right]_x^{x'} + \int_x^{x'} (F(w+\theta_o)-F(\theta_o))dt \leq \int_x^{x'} g(t)dt \leq \left[-\frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}}\right]_x^{x'} + \int_x^{x'} (F(v+\theta_o)-F(\theta_o))dt$$

F est décroissante, $v \geq 0$ et $w \leq 0$ d'où :

$$\int_x^{x'} (F(v+\theta_o)-F(\theta_o))dt \leq 0 \quad \text{et} \quad \int_x^{x'} (F(w+\theta_o)-F(\theta_o))dt \geq 0$$

On en déduit

$$-2 \leq \int_x^{x'} g(t)dt \leq 2 \qquad \forall\, x,x' \in [0,L]$$

D'où le résultat annoncé.

Proposition 3-2

Soit $g \in L^q(\Omega)$, $q > 1$

telle que $|g+F(\theta_o)|_{L^1(\Omega)} < 1$.

Alors il existe une sur solution $v \geq 0$, dans $W_o^{1,\infty}(\Omega)$ pour le problème $P(\theta_o,L,g)$.

Démonstration

Posons $h(x) = \sup(g(x)+F(\theta_o),0)$

$h \in L^q(\Omega)$

On considère le problème

$$(3\text{-}1) \qquad \begin{cases} -\frac{d}{dx}\frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}} = h(x) \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$

On approche ce problème par le suivant :

$$\begin{cases} -\varepsilon \frac{d}{dx}(|v'_\varepsilon|^{q'-2}v'_\varepsilon) - \frac{d}{dx}\frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}} = h(x) \quad (\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1) \\ v_\varepsilon(0) = v_\varepsilon(L) = 0 \end{cases}$$

Ce dernier problème admet une solution unique v_ε dans $W^{1,q'}(\Omega)$.
(cf. lemme 2-3).

Par un raisonnement analogue à celui du théorème 2-2 et utilisant le fait que $|h|_{L^1(\Omega)} < 1$, on montre que v'_ε est dans un borné de $L^\infty(\Omega)$.
On peut alors extraire de la suite v_ε une sous-suite convergeant vers $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\frac{v'}{\sqrt{1+v'^2}} = h(x) \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$

Comme $h \geqslant 0$ on a $v \geqslant 0$.

Par suite

$$A(v) + F(v+\theta_o) \geqslant h(x) \geqslant g(x) + F(\theta_o) \quad \text{p.p. dans } \Omega .$$

La solution v du problème (3-1) , dans $W_o^{1,\infty}(\Omega)$, est une sur solution positive pour le problème $P(\theta_o, L, g)$.

3-2 CAS OU $g \in L^\infty(\Omega)$ ET $F(u) = \frac{1}{u}$

On revient donc au problème initial

$$\begin{cases} -\frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} + \frac{1}{u+\theta_o} - \frac{1}{\theta_o} = g \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

3-2.a Le problème a déjà été résolu pour $g(x) \equiv -\frac{1}{\theta_o}$:
Lorsque $L \leqslant 2\theta_o \operatorname{cotg} \alpha$ le problème $P(\theta_o, L, -\frac{1}{\theta_o})$ possède au moins une solution u_o de classe C^2 sur $[0,L]$ (et $u_o > -\theta_o$)
u_o est alors sous solution pour le problème $P(\theta_o, L, g)$ lorsque $g(x) + \frac{1}{\theta_o} \geqslant 0$.

Proposition 3-3

Lorsque $-\frac{1}{\theta_o} \leqslant g \leqslant 0$ et $L \leqslant 2\theta_o \operatorname{cotg} \alpha$, le problème $P(\theta_o, L, g)$ possède une solution maximale u_{max} et une solution minimale u_{min} dans $C^1(\bar{\Omega})$.

Les hypothèses du théorème 2-1 sont alors remplies avec une sous solution u_o appartenant à $W^{1,\infty}(\Omega)$. Il existe donc u_{min} et u_{max} dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, appartenant au convexe $[u_o, 0]$, solutions de $P(\theta_o, L, g)$ (d'où on déduit que u_{min} et u_{max} appartiennent à $C^1(\bar{\Omega})$) .

Proposition 3-4

Soit $g \in L^{\infty}(\Omega)$, $g \leqslant -\frac{1}{\theta_o}$

et $L > 2\theta_o \operatorname{cotg} \alpha$

Alors il n'existe pas de fonction u dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, solution de $P(\theta_o,L,g)$ et vérifiant :

$$u > -\theta_o$$

Démonstration

On suppose que $P(\theta_o,L,g)$ a une solution u dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, et $u > -\theta_o$.

Puisque $g + \frac{1}{\theta_o} \leqslant 0$, u serait alors sous solution pour $P(\theta_o,L,-\frac{1}{\theta_o})$.

Et on déduirait du théorème (2-1) que le problème $P(\theta_o,L,-\frac{1}{\theta_o})$ admet une solution u_o dans $W^{1,\infty}(\Omega)$.

u_o solution de $P(\theta_o,L,-\frac{1}{\theta_o})$ et u_o dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, entraînent que $u_o \in C^2(\bar{\Omega})$ d'où une contradiction puisque pour $L > 2\theta_o \operatorname{cotg} \alpha$, $P(\theta_o,L,-\frac{1}{\theta_o})$ n'a pas de solution de classe C^2 sur $[0,L]$.

3-2.b Nous allons chercher maintenant à quelles conditions les fonctions z définies sur $[0,L]$ et correspondant aux arcs de cercle passant par les points $(0,0)$ et $(L,0)$ sont sur solution ou sous solution pour $P(\theta_o,L,g)$.

Soit $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. A ϕ on associe z_ϕ telle que $z'_\phi(0) = \operatorname{tg} \phi$.

Pour $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ $z_\phi \leqslant 0$ sur $[0,L]$.

Pour $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $z_\phi \geqslant 0$ sur $[0,L]$.

Lorsque $\phi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $z_\phi \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$.

Lorsque $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ $z_\phi \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $p = 2 - \alpha$ $\alpha > 0$.

$\forall \phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a d'autre part

$$(3\text{-}1) \qquad -\frac{z''_\phi}{(1+z'^2_\phi)^{3/2}} = \frac{2 \sin \phi}{L}$$

$$(3\text{-}2) \qquad \forall \phi \in [0,\tfrac{\pi}{2}] \quad \max_{x \in \Omega} z_\phi(x) = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\operatorname{tg} \phi}\right)$$

$$(3\text{-}3) \qquad \forall \phi \in [-\tfrac{\pi}{2}, 0] \quad \min_{x \in \Omega} z_\phi(x) = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{\operatorname{tg} \phi}\right) .$$

Conditions suffisantes pour que z_ϕ , $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ soit sur solution pour $P(\theta_o, L, g)$

---

z_ϕ remplit les conditions de régularité requises par la définition (2-1).
On a évidemment $z_\phi + \theta_o > 0$.

Ecrivons la condition

$$(3\text{-}4) \qquad A(z_\phi) + \frac{1}{z_\phi + \theta_o} \geqslant g(x) + \frac{1}{\theta_o}$$

Posons $\sup_{x \in \Omega} g(x) + \frac{1}{\theta_o} = M$

. Le cas où $\phi = 0$ équivaut au cas où 0 est sur solution, ce qui équivaut encore à $g(x) \leqslant 0$ p.p. $x \in \Omega$.

. Dans le cas où $\sup_{x \in \Omega} g > 0$ on cherche une sur solution du type z_ϕ avec $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Utilisant (3-1) et (3-2) il suffit pour réaliser (3-4) que

$$(3\text{-}5) \qquad \frac{2 \sin \phi}{L} + \frac{1}{\frac{L}{2}\left(\frac{1}{\sin \phi} - \frac{1}{tg\ \phi}\right) + \theta_o} \geqslant M$$

Une condition suffisante simple pour réaliser (3-5) est

$$M \leqslant \frac{2 \sin \phi}{L}$$

Conséquence : On suppose que l'on a :

$$(3\text{-}6) \qquad L \leqslant \frac{2}{\sup_{x \in \Omega} g + \frac{1}{\theta_o}}$$

Alors il existe $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que z_ϕ soit sur solution de $P(\theta_o, L, g)$.

Remarquons que si dans (3-6) on remplace $\frac{1}{\theta_o}$ par $F(\theta_o)$, on obtient alors une condition suffisante pour que le problème général $P(\theta_o, L, g)$ ait une sur solution.

Nous allons donner une autre condition suffisante pour réaliser (3-5) , plus forte que (3-6) .

(3-5) équivaut à

$$(3\text{-}7) \qquad \frac{1-\cos \phi}{\sin \phi} ML^2 + 2L(\theta_o M + \cos \phi - 2) - 4 \sin \phi\ \theta_o \leqslant 0 \quad .$$

La considération des racines de l'équation associée et de leur signe nous conduit au résultat suivant :

La condition

$$(3\text{-}8) \qquad L \leqslant \frac{4\,\theta_o \sin\phi}{\theta_o M+\cos\phi-2+\sqrt{(\theta_o M+\cos\phi-2)^2+4(1-\cos\phi)\theta_o M}}$$

est une condition suffisante pour que z_ϕ , $\phi \in [0,\frac{\pi}{2}]$ soit une sur solution du problème $P(\theta_o,L,g)$

Posons

$$h_1(\theta_o,\ \phi,\ \sup g)= \frac{4\,\theta_o \sin\phi}{\theta_o \sup g+\cos\phi-1+\sqrt{(\theta_o \sup g+\cos\phi-1)^2+4(1-\cos\phi)(\theta_o \sup g+1)}}$$

On peut énoncer le résultat suivant :

Proposition 3-3

On suppose L, θ_o, g donnés avec

$$g \in L^\infty(\Omega) \qquad \sup_{x\in\Omega} g(x) > 0$$

$$(3\text{-}9) \qquad L \leqslant \sup_{\phi \in [0,\frac{\pi}{2}]} h_1(\theta_o,\ \phi\ ,\ \sup g)$$

Il existe alors $\phi^* \in [0,\frac{\pi}{2}]$ tel que z_{ϕ^*} soit sur solution de $P(\theta_o,L,g)$.

La fonction $h_1(\theta_o,\ \phi\ ,\ \sup g)$ étant une fonction continue de ϕ , il existe $\phi^* \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$ tel que la borne supérieure soit atteinte donc tel que l'on ait (3-8) .

Condition suffisante pour que z_ϕ , $\phi \in [-\frac{\pi}{2}\ ,\ 0]$ soit sous-solution pour $P(\theta_o,L,g)$.

. $\phi = 0$ équivaut au cas où 0 est sous solution ce qui est encore équivalent à $g(x) \geqslant 0$ p.p. $x \in \Omega$.

. Dans le cas où $\inf_{x\in\Omega} g(x) < 0$ on cherche une sous-solution du type

z_ϕ avec $\phi \in [-\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\ [$

z_ϕ a les propriétés de régularité voulues.

On va imposer à z_ϕ les conditions

(3-10) $\quad z_\phi + \theta_o > 0 \quad$ dans Ω

(3-11) $\quad A(z_\phi) + \dfrac{1}{z_\phi + \theta_o} \leqslant g(x) + \dfrac{1}{\theta_o}$ dans Ω .

On pose $\quad \inf\limits_{x \in \Omega} g(x) + \dfrac{1}{\theta_o} = m$.

Pour réaliser (3-10) et (3-11) il suffit que l'on ait

(3-12) $\quad \dfrac{L}{2}\left(\dfrac{1}{\sin\phi} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}\phi}\right) + \theta_o > 0$

et

(3-13) $\quad \dfrac{2\sin\phi}{L} + \dfrac{1}{\frac{L}{2}\left(\frac{1}{\sin\phi} - \frac{1}{\operatorname{tg}\phi}\right)+\theta_o} \leqslant m$.

(En particulier (3-12) est réalisé $\forall \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ pour $L < 2\theta_o$) .

Supposons 3-12 réalisé , (3-13) équivaut à

(3-14) $\quad m\,\dfrac{1-\cos\phi}{\sin\phi}\,L^2 + 2(\theta_o m + \cos\phi - 2)L - 4\,\theta_o \sin\phi \geqslant 0$.

. Pour $\dfrac{1}{\theta_o} > m > 0$, les deux racines de l'équation associée à (3-14) α_1 et α_2 (avec $\alpha_1 < \alpha_2$) sont de signe contraire.

D'où la condition

(3-15) $\quad L \leqslant \alpha_2$.

. Pour $m < 0$, l'équation associée à (3-14) a deux racines positives α_1 et α_2) .

(3-14) serait réalisé pour $L \leqslant \alpha_1$ ou $L \geqslant \alpha_2$ mais tenant compte de (3-12) on ne garde que la condition :

(3-16) $\quad L \leqslant \alpha_1$.

Dans les deux cas les conditions (3-15) et (3-16) se traduisent par :

$$(3\text{-}17) \qquad L \leq \frac{-4\,\theta_o \sin\phi}{2-m\theta_o-\cos\phi+\sqrt{(2-m\theta_o-\cos\phi)^2+4m\theta_o(1-\cos\phi)}}$$

. Pour $m = 0$ (3-14) entraîne

$$L \leq -\frac{2\theta_o \sin\phi}{2-\cos\phi}$$

(inégalité que l'on peut obtenir à partir de (3-17) pour $m = 0$) .

(3-17) est une condition suffisante pour que z_ϕ , $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ soit sous solution de $P(\theta_o, L, g)$.

Posons

$$h_2(\theta_o,\phi,\inf g) = \frac{4\,\theta_o \sin\phi}{1-\theta_o \inf g-\cos\phi+\sqrt{(1-\theta_o \inf g-\cos\phi)^2+4(\theta_o \inf g+1)(1-\cos\phi)}}$$

On a le résultat suivant

Proposition 3-4

On suppose L, θ_o, g donnés avec

$$g \in L^\infty(\Omega) \qquad \inf_{x\in\Omega} g(x) < 0$$

$$(3\text{-}18) \qquad L \leq \sup_{\phi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]} h_2(\theta_o,\phi, \inf g)$$

Alors il existe

$$\phi^* \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } z_{-\phi^*} \text{ soit sous solution de } P(\theta_o, L, g).$$

Remarque 3-2

Soit $\inf_{x\in\Omega} g(x) \leq -\frac{1}{\theta_o}$

On peut remplacer (3-18) par une condition suffisante plus simple.

On a $\sqrt{(1-\theta_o \inf g-\cos\phi)^2+4(\theta_o \inf g+1)(1-\cos\phi)} \leq 1-\theta_o \inf g-\cos\phi$.

Pour réaliser (3-18) il suffit que :

$$(3\text{-}19) \qquad L \leq \sup_{\phi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \frac{2\theta_o \sin\phi}{1-\theta_o \inf g-\cos\phi}$$

L'étude de $y(\phi) = \dfrac{\sin \phi}{1-\theta_o \inf g - \cos \phi}$ montre que le maximum correspond à ϕ^* tel que :

$$\cos \phi^* = \frac{1}{1-\theta_o \inf g} \leq \frac{1}{2}$$

On obtient ainsi :

$$(3\text{-}20) \qquad L \leq \frac{2\,\theta_o}{\sqrt{(1-\theta_o \inf g)^2 - 1}}$$

En particulier pour $\inf g = -\dfrac{1}{\theta_o}$, on obtient la condition

$$L \leq 2\,\theta_o \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\,\theta_o \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} \quad .$$

En utilisant le théorème (2-1), on peut conclure que pour $L \leq 2\,\theta_o \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3}$ il existe une solution dans $C^2(\bar{\Omega})$ du problème $P(\theta_o, L, -\frac{1}{\theta_o})$.

Ceci entraîne $\operatorname{cotg} \alpha \geq \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3}$ (α a été définie au chapitre 0)

d'où $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$.

Lorsque $g \geq 0$ (resp. $g \leq 0$) les conditions suffisantes obtenues pour l'existence de sur solutions du problème $P(\theta_o, L, g)$ (resp. de sous solutions) sont également des conditions suffisantes pour l'existence de solutions de $P(\theta_o, L, g)$.

Lorsque g n'est pas de signe constant on obtient le résultat

Proposition 3-5

Soit $g \in L^\infty(\Omega)$

On peut trouver une application k de $\mathbb{R}^{+2}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour

$$L < k(\theta_o, |g|_{L^\infty(\Omega)}) \ .$$

Les hypothèses (2-40), (2-41), (2-42 bis) du théorème 2-2 soient vérifiées.

Démonstration

a) On cherche une fonction du type z_ϕ, $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ (une telle fonction vérifie l'hypothèse (2-41 iii)) qui soit sur solution pour $P(\theta_o, L, g)$ et telle que :

$$(3\text{-}21) \qquad \frac{z'_\phi(0)}{\sqrt{1+z'_\phi(0)^2}} - \frac{z'_\phi(L)}{\sqrt{1+z'_\phi(L)^2}} < 1$$

On a vu que (3-8) est une condition suffisante pour que z_ϕ soit sur solution de $P(\theta_o,L,g)$. D'autre part (3-21) équivaut à :

$$2 \sin \phi < 1 \quad \text{soit} \quad \phi < \frac{\pi}{6}$$

Par conséquent on a :

(3-22) Pour $L < \sup_{\phi \in [0,\frac{\pi}{6}]} h_1(\theta_o, \phi, \sup g)$

il existe $\phi^* \in [0, \frac{\pi}{6}[$ tel que z_{ϕ^*} soit sur solution de $P(\theta_o,L,g)$ et vérifie (3-21).

b) De même on cherche une fonction z_ϕ , $\phi \in]-\frac{\pi}{2},0]$ (elle vérifie donc l'hypothèse (2-41 ii) , qui soit sous solution pour $P(\theta_o,L,g)$ et telle que :

$$(3\text{-}23) \qquad \frac{z'_\phi(L)}{\sqrt{1+z'_\phi(L)^2}} - \frac{z'_\phi(0)}{\sqrt{1+z'_\phi(0)^2}} < 1$$

(3-23) équivaut à $\phi > -\frac{\pi}{6}$.

Et utilisant (3-17) , on a :

(3-24) Pour $L < \sup_{\phi \in [0,\frac{\pi}{6}]} h_2(\theta_o,\phi , \inf g)$

il existe $\phi^* \in [0, \frac{\pi}{6}[$ tel que $z_{-\phi^*}$ soit sous solution de $P(\theta_o,L,g)$ et vérifie (3-23).

h_1 est une fonction décroissante de sup g et h_2 une fonction croissante de inf g .

Donc les conditions

(3-25) $L < \sup_{\phi \in [0,\frac{\pi}{6}]} h_1(\theta_o, \phi, |g|_{L^\infty(\Omega)})$.

(3-26) $L < \sup_{\phi \in [0,\frac{\pi}{6}]} h_2(\theta_o, \phi,-|g|_{L^\infty(\Omega)})$.

sont suffisantes pour assurer (3-22) et (3-24) .

On en déduit la proposition (3-5).

Remarque

On peut présenter ces résultats sous une forme légèrement différente :

Soient L et θ_o donnés

Il existe Ψ application de $\mathbb{R}^{+2}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

pour $|g|_{L^\infty(\Omega)} < \Psi(\theta_o, L)$.

Les hypothèses (2-40) , (2-41) , (2-42 bis) soient vérifiées.

Il suffit d'utiliser (3-5) et (3-13) et d'imposer à ϕ soit la condition $\phi \in [0, \frac{\pi}{6}[$, soit la condition $\phi \in]-\frac{\pi}{6}, 0]$.

CHAPITRE IV

PROBLEME PERIODIQUE

Certains résultats du chapitre III permettent d'étudier maintenant le problème suivant :

Trouver une fonction u telle que :

$$\begin{cases} -\dfrac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{u} = f \quad \text{dans} \quad \Omega =]0,L[& (4\text{-}1) \\ u(0) = u(L) & (4\text{-}2) \\ u'(0) = u'(L) & (4\text{-}3) \end{cases}$$

On peut montrer dans certains cas simples que ce problème n'a pas de solution.

4-1 NON-EXISTENCE DE SOLUTIONS

Théorème 4-1

Soit $f \in C^{\circ}(\bar{\Omega})$ telle que $\int_{\Omega} f(x)dx = 0$.

Alors il n'existe pas de fonction u dans $C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (4-1) , (4-2), (4-3) .

Démonstration

Supposons qu'il existe u , dans $C^2(\bar{\Omega})$,solution de (4-1) , (4-2) , (4-3)

$$\frac{1}{u} = f - \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}$$

Comme $f \in C^0(\bar{\Omega})$ on a :

$$\frac{1}{u} \in C^0(\bar{\Omega}) \tag{4-4}$$

Puisque $u \in C^2(\bar{\Omega})$ on déduit de (4-4) que u est alors nécessairement de signe constant sur $[0,L]$.

Intégrons (4-1) sur $]0,L[$

$$\left[- \frac{u'}{(1+u'^2)^{1/2}} \right]_0^L + \int_\Omega \frac{dx}{u} = \int_\Omega f(x)dx$$

On en déduit :

$$\int_\Omega \frac{1}{u}\, dx = 0$$

Comme u est de signe constant et bornée on aboutit à une contradiction.

Théorème 4-2

Soit $f \in L^1(\Omega)$ vérifiant

$$|f|_{L^1(\Omega)} \leqslant 1 \tag{4-5}$$

$$\int_\Omega f(x)dx = 0 \tag{4-6}$$

Alors il n'existe pas de solution du problème (4-1) , (4-2) , (4-3) telle que $u \in C^1(\bar{\Omega})$ et $u'' \in L^1(\Omega)$.

Démonstration

Si on suppose l'existence d'une telle fonction u , alors $\frac{1}{u} \in L^1(\Omega)$.

Multiplions (4-1) par u et intégrons par parties, on a :

$$\int_\Omega \frac{u'^2}{\sqrt{1+u'^2}}\, dx + L = \int_\Omega f\, u\, dx$$

or $$\int_\Omega f\, u\, dx = \int_\Omega f\, u(0)\, dx + \int_\Omega f(x) \int_0^x u'(t)dt\, dx$$

Et d'après (4-6) on a :

$$\int_\Omega \frac{u'^2+1}{\sqrt{1+u'^2}} dx + \int_\Omega (1 - \frac{1}{\sqrt{1+u'^2}})dx = \int_\Omega f(x) \int_o^x u'(t)dt\, dx \quad . \tag{4-7}$$

De (4-7) on déduit

$$|u'|_{L^1(\Omega)} < |u'|_{L^1(\Omega)} |f|_{L^1(\Omega)} .$$

Et d'après (4-5) on arrive à une contradiction.

4-2 UN THEOREME D'EXISTENCE

Remarque 4-1

Si $f \equiv c$ alors le problème (4-1) , (4-2) , (4-3) a une solution $u \equiv \frac{1}{c}$.

Par ailleurs si u est une solution de (4-1) , (4-2) , (4-3) associée à f et L alors $-u$ est une solution associée à $-f$ et L .

Dans ce paragraphe on supposera que

(4-8) $\qquad f \in L^\infty(\Omega) \qquad f > 0 \quad$ p.p. dans Ω .

On pose $\quad \lambda = \dfrac{1}{\sup\limits_{x \in \Omega} f(x)} \quad$ et $\quad \mu = \dfrac{1}{\inf\limits_{x \in \Omega} f(x)}$

Théorème 4-3

Soit f donnée, vérifiant (4-8) .
Alors il existe une constante $k > 0$ telle que pour

$$L \leq k\,\lambda$$

le problème (4-1) , (4-2) , (4-3) admet au moins une solution u dans $C^1(\bar{\Omega})$.
et on a $\quad \lambda \leq u(0) \leq \mu$.

Démonstration

On considère les problèmes $P(\theta_o, L, f - \frac{1}{\theta_o})$ correspondant à $F(u) = \frac{1}{u}$.
Soit :

$$\begin{cases} -\dfrac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{u+\theta_o} = f \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

avec $\lambda \leq \theta_o \leq \mu$.

i) On suppose qu'il existe une sur solution v , vérifiant l'hypothèse (2-41) pour le problème $P(\mu, L, f - \frac{1}{\mu})$.

0 étant sous-solution pour ce problème, on en déduit que $P(\mu, L, f - \frac{1}{\mu})$ a une solution u_μ dans le convexe $[0, v]$.

D'autre part v est également sur solution pour $P(\theta_o, L, f - \frac{1}{\theta_o})$ $\forall\, \theta_o \leq \mu$.

ii) On suppose maintenant qu'il existe une sous solution w , vérifiant l'hypothèse (2-41), pour le problème $P(\lambda, L, f - \frac{1}{\lambda})$.

0 étant sur solution pour ce problème, on en déduit que $P(\lambda, L, f - \frac{1}{\lambda})$ a une solution u_λ dans le convexe $[w, 0]$.

De plus w est sous solution pour $P(\theta_o, L, f - \frac{1}{\theta_o})$ $\forall\, \theta_o \geq \lambda$.

iii) On fait maintenant des hypothèses supplémentaires (hypothèse (2-42) , ou (2-42 bis), et hypothèse (2-47)) pour assurer l'existence et l'unicité , à l'intérieur du convexe $[w, v]$, d'une solution u_{θ_o} , dans $C^1(\bar{\Omega})$, pour le problème $P(\theta_o, L, f - \frac{1}{\theta_o})$ avec $\lambda \leq \theta_o \leq \mu$.

Utilisant les résultats du chapitre III, on précisera dans la suite des conditions suffisantes pour que les hypothèses précédentes soient remplies.

Pour démontrer le théorème 4-3 , on utilisera également le résultat suivant :

Lemme 4-1

Pour tout $x \in [0, L]$, $u'_{\theta_o}(x)$ est une fonction continue de θ_o sur $[\lambda, \mu]$.

Démonstration du lemme 4-1

Les hypothèses i, ii, iii, entraînent que pour u_{θ_o} solution du problème $P(\theta_o, L, f - \frac{1}{\theta_o})$, avec $\theta_o \in [\lambda, \mu]$ on a

$$(4\text{-}9) \qquad w(x) \leq u_{\theta_o}(x) \leq v(x) \qquad \forall\, x \in [0, L]$$

$$(4\text{-}10) \qquad |u'_{\theta_o}(x)| \leq \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \qquad \forall\, x \in [0, L]$$

u_{θ_o} étant solution de

$$\frac{-u''_{\theta_o}}{(1+u'^2_{\theta_o})^{3/2}} + \frac{1}{u_{\theta_o} + \theta_o} = f$$

et utilisant (4-8) , (4-9) et (4-10) , on en déduit que u''_{θ_o} est dans un borné de $L^\infty(\Omega)$.

Etudions le comportement de la suite u_θ lorsque $\theta \to \theta_o$.

Utilisant le théorème d'Ascoli-Arzela, on peut alors extraire de cette suite une nouvelle suite $u_{\theta'}$ telle que $u_{\theta'}$ converge uniformément vers u_* et $u'_{\theta'}$ converge uniformément vers u'_* sur $[0,L]$.

u_* est alors solution de $P(\theta_o,L,f-\frac{1}{\theta_o})$ et $w \leqslant u_* \leqslant v$.

Le problème $P(\theta_o,L,f-\frac{1}{\theta_o})$ a une solution unique u_{θ_o} dans $[w,v]$.

Par conséquent toute la suite u_θ et toute la suite u'_θ convergent uniformément vers u_{θ_o} et u'_{θ_o} lorsque $\theta \to \theta_o$. □

Considérons alors la fonction U définie pour $\theta_o \in [\lambda,\Gamma]$ par :

$$U(\theta_o) = u'_{\theta_o}(0) - u'_{\theta_o}(L)$$

D'après le lemme (4-1) U est une fonction continue de θ_o .

D'autre part d'après iii) le problème $P(\mu,L,f-\frac{1}{\mu})$ a une solution unique sur le convexe $[w,v]$, mais d'après i) cette solution u_μ est en fait dans le convexe $[0,v]$.

Vu le choix de μ on a :

$$u''_\mu \leqslant 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{et par suite}$$

$$U(\mu) = u'_\mu(0) - u'_\mu(L) \geqslant 0 \quad .$$

De façon analogue, pour u_λ solution de $P(\lambda,L,f-\frac{1}{\lambda})$ dans le convexe $[w,0]$ on a

$$u''_\lambda \geqslant 0 \quad \text{p.p.} \quad \text{et par suite}$$

$$U(\lambda) = u'_\lambda(0) - u'_\lambda(L) \leqslant 0$$

On applique alors le théorème des valeurs intermédiaires.

Il existe θ_* , $\lambda \leqslant \theta_* \leqslant \mu$ tel que $U(\theta_*) = 0$.

Soit u_{θ_*} la solution de $P(\theta_*,L,f-\frac{1}{\theta_*})$ dans le convexe $[w,v]$,

on pose $y = u_{\theta_*} + \theta_*$

y vérifie alors :

$$\begin{cases} -\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{y} = f \\ y(0) = y(L) = \theta_* \\ y'(0) = y'(L) \end{cases}$$

y est une solution dans $C^1(\bar{\Omega})$ de (4-1) , (4-2) , (4-3) .

Conditions sur L et λ pour assurer les hypothèses i, ii, iii.

On utilise pour cela les conditions suffisantes les plus simples du chapitre III.

. Pour que z_{ϕ_o} soit une sur solution de $P(\mu,L,f-\frac{1}{\mu})$ vérifiant (2-41) , (2-42 bis) il suffit d'après (3-5) que :

$$(4\text{-}11) \qquad L \leq \frac{2 \sin \phi_o}{\sup f(x)} = 2 \lambda \sin \phi_o \quad \text{avec} \quad \phi_o \in [0, \tfrac{\pi}{6}[\quad .$$

. f étant positive, lorsqu'il existe une sous solution au problème $P(\lambda,I,-\frac{1}{\lambda})$, celle-ci est sous solution pour $P(\lambda,L,f-\frac{1}{\lambda})$.

Pour que $z_{-\phi_1}$ soit une sous solution de $P(\lambda,L,-\frac{1}{\lambda})$ vérifiant (2-41), (2-42 bis) il suffit, utilisant (3-19) que :

$$(4\text{-}12) \qquad L \leq \frac{2\lambda \sin \phi_1}{2-\cos \phi_1} \quad \text{avec} \quad \phi_1 \in [0, \tfrac{\pi}{6}[\quad .$$

. Pour avoir maintenant l'unicité pour le problème $P(\theta_o,L,f-\frac{1}{\theta_o})$ à l'intérieur du convexe $[z_{-\phi_1}, z_{\phi_o}]$ on impose à L la condition (2-47) :

$$L \leq \sqrt{2}\,(1-k^2)^{3/4} \left(\inf_{x \in \Omega} z_{-\phi_1}(x) + \theta_o\right)$$

où $\quad k = \max(k_1,k_o) \quad$ avec $\quad k_i = 2 \sin \phi_i$

on minore $\quad \inf_{x \in \Omega} z_{-\phi_1}(x)+\theta_o \quad$ par $\quad \inf_{x \in \Omega} z_{-\phi_1}(x)+ \lambda = \dfrac{\cos \phi_1 - 1}{\sin \phi_1} \dfrac{L}{2} + \lambda$

On obtient à partir de ceci :

$$(4\text{-}13\ i) \qquad L \leq \frac{\lambda \sqrt{2}\ (1-k_i^2)^{3/4} \sin \phi_1}{\sin \phi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\ (1-k_i^2)^{3/4}\ (1-\cos \phi_1)} \qquad i = 0,1 \quad .$$

On remarque que, lorsque (4-12) et (4-13.1) sont vérifiées avec $\phi_1 \in [0, \frac{\pi}{6}[$ alors (4-11) et (4-13-0) sont vérifiées avec $\phi_o = \phi_1$.

Posons $$h_1(\phi) = \frac{2 \sin \phi}{2-\cos \phi}$$

et $$h_2(\phi) = \frac{\sqrt{2}\ (1-4 \sin^2 \phi)^{3/4} \sin \phi}{\sin \phi + \frac{\sqrt{2}}{2}\ (1-4 \sin^2 \phi)^{3/4}(1-\cos \phi)}$$

Lorsque ϕ croit de 0 à $\frac{\pi}{6}$ $h_1(\phi)$ croit de 0 à $\frac{2}{4-\sqrt{3}}$ et $h_2(\phi)$ décroît de $\sqrt{2}$ à 0 .

Le meilleur choix de ϕ_1 pour réaliser simultanément (4-12) et (4-13-1) est celui qui correspond à $h_1(\phi_1) = h_2(\phi_1)$

Par un calcul numérique on obtient ainsi :

$$(4\text{-}14) \qquad L \leq 0,70\ \lambda \quad \text{pour} \quad \sin \phi_1 = 0,376.$$

Dans le théorème (4-3) on peut alors prendre $k = 0,70$.

CONCLUSIONS

L'étude précédente nous permet d'énoncer les résultats suivants concernant le problème initial.

1°/ Problème avec conditions de Dirichlet

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\dfrac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} + \dfrac{1}{u+\theta_o} = g + \dfrac{1}{\theta_o} \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

Soit $g \in L^q(\Omega)$, $q > 1$, vérifiant

$$g \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \left| g + \frac{1}{\theta_o} \right|_{L^1(\Omega)} < 1$$

Alors sur le convexe $[0,v]$ le problème $P(\theta_o,L,g)$ admet une solution minimale et une solution maximale dans $C^1(\bar{\Omega})$.

Soit $g \in L^\infty(\Omega)$.
On peut expliciter une application k de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour

(c) $$L < k(\theta_o, |g|_{L^\infty(\Omega)})$$

le problème $P(\theta_o,L,g)$ ait une solution maximale et une solution minimale dans $C^1(\bar{\Omega}) \cap [w,v]$, w et v étant associées à deux arcs de cercle.

Remarques :

. On vérifie que l'application k (déterminée au chapitre III) possède les propriétés suivantes :

$(x,y) \to k(x,y)$ est croissante en x , décroissante en y .

. Lorsque g est de signe constant , L vérifiant toujours la condition (c) , il existe des solutions de $P(\theta_o,L,g)$ dans le convexe $[0,v]$, ou dans le convexe $[w,0]$, représentées par des courbes convexes ou concaves.

2°/ Problème périodique

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} + \frac{1}{u} = f \\ u(0) = u(L) \\ u'(0) = u'(L) \end{cases}$$

Soit $f \in L^\infty(\Omega)$, $f > 0$ dans Ω (ou $f < 0$) .

On peut trouver une constante c telle que pour tout L vérifiant

$$L < \frac{c}{|f|_{L^\infty(\Omega)}}$$

le problème périodique admette au moins une solution dans $C^1(\bar{\Omega})$.

Dans le système d'équations proposé par J.M. Quenisset pour un problème de cristallographie, on rencontre une équation du type suivant (loi de Laplace)

$$-\frac{\theta''}{(1+\theta'^2)^{3/2}} + \frac{1}{\theta\sqrt{1+\theta'^2}} = \frac{p(x)-p_a}{\gamma}$$

avec $\theta(0) = \theta(L) = R$.

Si l'on suppose $p(x)$ connue, ce problème peut être étudié par une méthode analogue à celle du chapitre I .
Il intervient quelques modifications techniques dues au fait que $\frac{1}{\theta}$ est remplacé par un terme non linéaire dépendant de θ et θ' : $\frac{1}{\theta\sqrt{1+\theta'^2}}$

- D'une part il faut obtenir une estimation supplémentaire. Ceci peut être réalisé en considérant une base spéciale pour la méthode de Galerkin.

- Par ailleurs en supposant qu'il existe $v \in H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$ tel que

$$-\frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}} \geqslant \frac{p(x)-p_a}{\gamma}$$

on peut conclure.

BIBLIOGRAPHIE

A.J. CALLEGARI et E.L. REISS : Non linear boundary value problems for the circular membrane.
Archive for Rat. Mech. and Analysis, 31 (1968), 390-400.

A.J. CALLEGARI, E.L. REISS et H.B. KELLER : A study of solution multiplicity
Comm. Pure Applied Math., XXIV (1971), 499-527.

J. CHANDRA et P.W. DAVIS : A monotone method for quasilinear boundary value problems.
Archive for Rat. Mech. and Analysis, 54 (1974), 257-266.

D.S. COHEN et H.B. KELLER : Some positone problems suggested by non linear heat generation.
J. of Math. and Mech, 16 (1967), 1361-1376.

J.P. KERNEVEZ : Thèse, Paris, 1972.

J.L. LIONS Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.
Dunod, Paris, 1969.

J.P. PUEL Existence, comportement à l'infini et stabilité dans certains problèmes quasilinéaires elliptiques et paraboliques d'ordre 2.
Paris, Publ. L.A. C.N.R.S. 189, 1974.

J.M. QUENISSET Communication personnelle.

D.H. SATTINGER : Monotone methods in non linear elliptic and parabolic boundary value problems.
Indiana Univ. Math. Journal, 21 (1972), 979-1000.

K. SCHMITT Periodic solutions of systems of second order differential equations.
J. of diff. equations, 11 (1972), 180-192.

G. STAMPACCHIA Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.
Séminaire de mathématiques supérieures, 1965, Université de Montréal.